התיכון הישראלי למדעים ולאמנויות | יאסא | המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

עבודת גמר בהיסטוריה

הדיאלוג בין בונאבנטורה קווליארי ופאול גולדין כמקרה בוחן להתנגדות החברה הישועית אל המתמטיקה האינפיניטסימלית במאה ה- 17

מנחה העבודה: פרופ' רז חן מוריס

מגישה: טל קורן

שנת הלימודים התשע"ז 2016-2017

מחזור כ"ו

הקדמה

אל הנושא המרתק (ומעט שכוח אל) שבחרתי לעבודת הגמר שלי הגעתי במקרה לגמרי. בחיפושי הארוכים אחר שאלה שאסכים לקשור את עצמי אליה במשך שנה שלמה נתקלתי בדיון מתמטי בן המאה ה17, בין שני מתמטיקאים שאת שמם ועל פועלם לא שמעתי לפני כן מעולם. העבודה פתחה את עיניי לעולם המרתק של היסטוריה של המתמטיקה, והיסטוריה של הרעיונות באופן כללי. עולם שבו נפגשים, מתנגשים ומתהפכים מאבקי כוח פוליטיים ומאבקי החידוש המדעי והחקר האנושי. לאחר כמעט שנה של עבודה מפרכת, המפגש המקרי הזה הגיע אל קיצו.

בהזדמנות זו ארצה להודות לכל האנשים שבזכותם הצלחתי לעמוד במשימה המאתגרת הזו. לכל החברים ובני המשפחה שמתוך רצון להקשיב ולעזור נקלעו לשמיעת הסברים מייגעים על תיאולוגיה ומתמטיקה של העת החדשה. לכל אלו שעזרו לי לפענח את הרעיונות, את הסמלים ואת השפה המאתגרים, גם אם לא הכירו כלל את הנושא. להוריי שתמיד מצאו דרך לעזור למרות הנושא המאתגר, לאיתמר, יותם, ועדי על התמיכה והעזרה, אם בחיוך, בעידוד, בתרגום, בדחיפה או במענה לשאלה ביזארית זו או אחרת בנוגע לתיאוריות מתמטיות שאבד עליהן הכלח. לענאל, שאיכשהו הצליחה לעשות את כולם גם יחד, ולפעמים רק בזכותה הצלחתי להמשיך לכתוב. תודה מיוחדת לד״ר יעל יוסטוס סגל שליוותה אותי ואת העבודה בעניין רב ובסבלנות אין קץ, ולמנחה שלי פרופ׳ רז חן מוריס, על הנחייה מסורה ועניין אמתי בעבודה שבלעדיהם לא הייתי מצליחה לכתוב אותה.

תוכן עניינים

1. מבוא

עבודה זו תבחן את התנגדות החברה הישועית אל התפתחותה של המתמטיקה האינפיניטסימלית במאה ה- 17 באמצעות הדיאלוג המתמטי בין קוואליארי וגולדין.

הדיון המתמטי בחשבון האינפיניטסימלי במאה ה- 17 נפתח עם המתמטיקאי האיטלקי בונאוונטורה קוואליארי (Bonaventura Cavalieri, 1598 - 1647). קוואליארי הציג בספרו **Geometria Indivisibilibus** (גיאומטריה של הבלתי ניתנים לחלוקה) עיקרון מתמטי אינפיניטסימלי הקרוי על שמו. העיקרון מסתמך על ההנחה שכל גודל סופי ניתן לחלוקה למספר אין סופי של גדלים בלתי ניתנים לחלוקה (אינדיביזיבילים), שגודלם אפס. הנחה זו מוכחת כיעילה מבחינה מתמטית, משום שהיא מאפשרת חישוב שטחים ואורכים שלא ניתנו לחישוב בשיטות גיאומטריות אחרות.

בזמנו של קוואליארי היה המסדר הישועי כוח מהותי בזירת ההשכלה. המסדר הישועי קיבל מקום משמעותי בהשכלת אירופה, במיוחד בארצות הקתוליות ורבים מהמתמטיקאים ואנשי הרוח של אותה התקופה התחנכו בבתי ספר של המסדר. אך המסדר הישועי היה מסדר דתי קתולי, וככזה היה כפוף למערכת אמונה היררכית, ברורה ומסוגרת. נוצר כאן קונפילקט בין הנטייה המדעית לחידוש, ובין הנטייה הדתית הישועית לשמרנות.

קוואליארי העמיד את המתמטיקה ואת הישועים על פרשת דרכים: בין ישן לחדש ובין דת למדע. ההתנגשות זו הייתה מהותיות משום שלמתמטיקה הישועית הייתה גם משמעות תיאולוגית ופילוסופית, שבבסיסה סתרה את המתמטיקה האינפיניטסימלית. העיקרון המתמטי החדשני של קוואליארי פתח באופן מודע יותר מתמיד את הדיון והקונפליקט בין דת למדע, בין ההגבלות התיאולוגיות והחידוש המתמטי, בין מה שיש בעולם למה שהישועים רצו לראות בעולם.

1. 1. המבנה של מערכת ההשכלה עד המאה ה- 17

לפני הדיון בהשכלה הישועית והשפעתה על הדיון המתמטי באירופה במאה ה- 17, אסקור את התפתחות ההשכלה בימי הביניים ועד לעת החדשה. אעמוד על מקומה של המתמטיקה בהיררכית הידע באותה תקופה, ולבסוף אצביע על מקומם של הישועים במיסוד וקיבוע אותה הירכיה.

בימי הביניים המוקדמים ההשכלה נמצאה, באופן גורף, באחריות הכנסייה. הלימודים התרכזו לצד מרכזים דתיים - בערים לצד קתדרלות, ומחוץ לערים במנזרים. ההשכלה הושפעה משתי מסורות ידע עיקריות. הראשונה היא מערכת הידע וההשכלה הרומאית, שהכילה את שבע האמנויות החופשיות: הטריוויום, שהיו שלוש האומנויות הבסיסיות - דקדוק, רטוריקה ולוגיקה, והקוודריויום, האומנויות המתמטיות: אריתמטיקה, גיאומטריה, מוזיקה ואסטרונומיה. נוסף על כך התבסס הידע על טקסטים פילוסופיים הלניסטים מועטים ששרדו מיוון הקלאסית והמשמעותי שבהם היה הלוגיקה של אריסטו. אלה נשמרו ותווכו בעיקר באמצעות כתביו של בואתיוס (Boethius) שפעל בשנים שסביב נפילתה של האימפריה הרומית במערב. מסורת הידע השנייה הייתה ההשכלה הדתית, שבבסיסה כתבי הקודש וכתבי אבות הכנסייה. שתי מסורות הידע האלה

הלכו והתפתחו, והקשר ביניהן היה פעמים רבות זה שהגדיר את התפתחות מערכת ההשכלה לאורך ימי הביניים.

עם התפשטות העיור מאמצע המאה ה- 12, המנזרים הפכו לשוליים לעומת הקתדרלות שבעיר, ובתי הספר העירוניים הלכו והתמסדו. אם בתחילת ימי הביניים היו בתי הספר לרוב התארגנויות מקומיות סביב מורה ששמו יצא למרחקים, עם התפתחות העיר התמסדו בתי הספר והופכו לגילדות הוראה - אוניברסיטאות. על האוניברסיטאות לא הייתה מערכת פיקוח אחידה. לעיתים האוניברסיטה הייתה כפופה לשלטון החילוני, לעיתים לדתי. דווקא מקומה של האוניברסיטה על התפר בין השניים אפשר לה אוטונומיה גדולה יחסית, ובמקומות רבים היא עברה בין השניים לפי אינטרסים תקופתיים.[1]

האוניברסיטאות חולקו לפקולטה לאומנויות, הפקולטה לתיאולוגיה, הפקולטה למשפטים הפקולטה לרפואה. בשתיים האחרונות לא אדון, משום שהן כלל אינן משמעותיות לנושא הנדון כאן. באופן מסורתי, הפקולטה לאומנויות שויכה לידע החילוני, בעוד הפקולטה לתיאולוגיה שויכה לכנסייה. חלוקה זו היא פשטנית למדי, משום שהיא מתעלמת מכך ששתי הפקולטות היו תחת פיקוח הכנסייה, ומכך שכל תלמידי התיאולוגיה היו בוגרי הפקולטה לאומנויות, משום ששבע האומנויות החופשיות אשר נלמדו בפקולטה לאומנויות נחשבו כהכנה ללימוד התיאולוגיה, העליונה עליהן. חלוקה זו מתעלמת לגמרי מתחום ידע מסורתי נוסף, הפילוסופיה. בתחום זה יש לעשות הבחנה בין שני סוגי כתבים. הכתבים הפילוסופיים המוקדמים היו בידי הכנסייה והאוניברסיטה מניצניה ולכן שגשגו וביססו את לימודי התיאולוגיה והאומנויות. אמנם הכתבים המאוחרים, כתבי אריסטו שתורגמו ללטינית במאות ה- 12 וה- 13, עוררו בתחילה התנגדות ונאסרו ללימוד בחלק ממוסדות הלימוד, אך ניתן לראות שתוך זמן קצר הוסרו איסורים והגבלות אלה, ולמרות שהעיסוק הפילוסופי פוקח על ידי הכנסייה ורק פרשנויות ספציפיות לכל טקסט הותרו ללימוד, חדרו כתבי אריסטו כולם אל ההשכלה האירופאית.[2]

במחצית הראשונה של המאה השלוש עשרה, עלה קרנם של כתבי אריסטו. ה"לוגיקה", הטקסט האריסטוטלי הנפוץ בימי הביניים, קיבל מקום הולך וגדל בכל האוניברסיטאות ברחבי אירופה. טקסטים אריסטוטליים נוספים שהחלו להגיע לאירופה, דרך ארצות האסלאם, עברו התאמה לעולם הידע מבוסס התיאולוגיה של ימי הביניים. מערכת הידע האריסטוטלית היררכית של המדעים ושל הידע נשמרה אך הפעם התיאולוגיה עמדה בראשה והמדעים האחרים הובילו אליה. לאריסטו נשמר מקום של כבוד ומושגים שהגדיר שימשו בכל תחומי המדע והמחקר. הכתבים האריסטוטליים הגדירו אילו דיספלינות ראויות ללימוד, ובכל דיספלינה, מהי שיטת המחקר ומסגרתו.[3]

בתוך המערכת הזו, למטפיזיקה נוצר מקום בעייתי. כביכול, למטפיזיקה ולתיאולוגיה יש את אותו התפקיד, שכן שתיהן עונות על ההגדרה "מדע העניינים האלוהיים". עם התקבלותם של

[1] יוסף שוורץ. **מהמנזר אל האוניברסיטה, בין תיאולוגיה לפילוסופיה בימי הביניים**. תל אביב, משרד הביטחון, 1999. עמודים 70-66.

[2] שוורץ, **מהמנזר אל האוניברסיטה**. עמודים 70-66.

[3] שוורץ, **מהמנזר אל האוניברסיטה**. עמוד 70.

כתבי אריסטו ניצב אל מול התיאולוגיה המטפיזיקה, שהיה תחום שביכולתו להחליף אותה. משום כך בתחומים הבעייתיים מבחינה תיאולוגית (במטפיזיקה בעיקר, אבל לא רק בה) הוגדרו בקפידה הפרשנים או המסגרות המצומצמות בהן היה ניתן לעסוק בנושא, זאת על מנת להימנע מסתירה או כפירה בעקרונות הדתיים.[4] בעקבות ההגדרות האריסטוטליות נוצר גם למתמטיקה מקום בעייתי בהירככית הידע, אך על זאת ארחיב בהמשך.

1. 2. המסדר הישועי

המסדר הישועי נוסד רשמית בשנת 1540 (מייסדו הגה את ייסודו לראשונה בשנת 1534) על ידי איגנטיוס מלויולה (Ignatius of Loyola) ושישה תלמידים נוספים בוגרי אוניברסיטת פריז. בשנת 1534 השבעה נשבעו לעוני ולפרישות ולאחר מכן גם לציות, והקימו את "המסדר של ישו" ("The Society of Jesus"), הוא המסדר הישועי. בשנת 1540 אישר האפיפיור פאולוס השלישי את ייסוד המסדר. בתחילה הגדיר איגנטיוס את מטרת המסדר: לריפוי חולים ועבודת מיסיון בירושלים, או ללכת לכל מקום אליו יורה האפיפיור ללכת. דווקא החינוך, שלימים הפך לאחת המטרות המזוהות עם המסדר, לא היה בראש מעייניו, ובנוסח הראשון של תקנות המסדר מודגש כי לא ייערכו לימודים והרצאות במסגרתו. עם עליית כוחה של הכנסייה הפרוטסטנטית והפצת הדת הלותרנית, המטרה הראשונית של המסדר, עבודות מסיון בירושלים, הוסבה לעבודות מסיון ברחבי אירופה, והישועים מיקדו את עיקר מרצם בהפצת ושימור האמונה הקתולית באירופה.[5]

למרות המטרה המיסיונרית המוצהרת של המסדר תוך עשרים שנה הפך החינוך למטרתו המרכזית של המסדר והחלו להתפתח בתי הספר של המסדר. בתחילה הוצדקה התפתחות בתי הספר בצורך להכשיר כמרים נוספים על מנת להצליח ולעמוד אל מול התפשטות הדת הפרוטסטנטית. כאשר החלה מערכת החינוך הישועית לתפוס תאוצה ונוספו אליה גם תלמידים שלא יועדו לכמורה ולמיסיונריות, נטען כי החינוך מסייע להבנת כתבי הקודש וכך משרת את מטרת המסדר - חיזוק את האמונה הקתולית. בסוף שנות השישים של המאה ה- 16 כבר התקבעה במסדר מערכת ערכים שלמה ומגובשת המבוססת על העדפה ערכית של "חיי הגות ודיון" והחינוך הפך למטרתו העיקרית של המסדר. בשנת 1580 כבר היו למסדר 144 בתי ספר, ותוך חמישים שנה המספר שילש את עצמו. מטרת המסדר החדשה הייתה לחנך את הצעירים, ובמיוחד לחנך את בני האצולה, זאת כדי לחנך את שליטי אירופה העתידיים ברוח נוצרית קתולית. בתי הספר שהקימו חברי המסדר פשטו בכל אירופה ועם התפשטות זו החלה העלייה בחשיבותן של תכנית הלימודים ושל מערכת ההשכלה הישועית כולה.[6]

מערכת ההשכלה הישועית הורכבה מבתי ספר וקולג'ים, שהגדולים מבניהם הפכו עם הזמן לאוניברסיטאות. מרכז ההשכלה הישועית היה הקולגיו רומנו (Collegio Romano), לימים האוניברסיטה הגרגוריאנית, שנחשבה למובילה בעולם הקתולי. בבתי הספר למדו תלמידים

---

[4] שוורץ, **מהמנזר אל האוניברסיטה**. עמודים 75-80.

[5] Amir R. Alexander, **Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World.** New York: Scientific American/ Farrar, Straus and Giroux, 2014. pp. 32-34.

[6] Dennis C. Smolarski, "The Jesuit Ratio Studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities." **Science in Context,** volume 15, 2002, pages 447-457. pp. 447-448.

ישועים וחילוניים, אך גם התלמידים החילוניים התגוררו תחת פיקוח אנשי המסדר ושמרו על אורח חיים צנוע ונוצרי. הלימודים נערכו במסגרת שתי פקולטות - הפקולטה לאומנויות והפקולטה לתיאולוגיה.

תכני הלימוד בבתי הספר הישועיים היו מוקד למחלוקות רבות ושנים רבות עברו בטרם התקבעה תכנית הלימודים הישועית, הרציו סטדיורום, שגרסתה הסופית פורסמה רק ב- 1599. הלימודים היו כפופים למערכת הדתית הקתולית, וכפי שהגדירו אבי המסדר איגנטיוס ורבים אחריו, מטרת הלימודים הישועיים הייתה דתית[7]. הפחד מסטייה וממינות, במיוחד לאור ההתפתחות של תחומי לימוד ומחקר לא מסורתיים, הוביל לבנייה של תכנית לימודים מוגדרת היטב הכוללת את התחומים בהם ניתן לעסוק ואת האופן הראוי לעסוק בכל אחד מהם. הפחד ממינות יצר מערכת מורכבת של צנזורה ושל פיקוח פנימי שהשגיחו על התכנים הנלמדים, על תחומי המחקר, ועל הדעות בהם החזיקו התלמידים כולם, תלמידים חברי המסדר במיוחד. חידוש היה אסור, ודעות חדשות שכן הוצגו היו חייבות לעבור אישור של ראש החוג[8], ונבחנו לאור הכתבים הקאנונים והדעות המקובלות. יותר מאוחר החברה הישועית אף כוננה וועדה מצנזרת - כל מסמך שהתפרסם בעולם הידע הישועי חייב היה לעבור אישור של המצנזרים. לאורך השנים, החלו המצנזרים לקבוע מהן הדעות המקובלות ואילו דעות אסורות ללימוד. תלמידים ופרופסורים רבים התנגדו למערכת הביקורת הזו וטענו שהאיסור על חידוש פוגע בהשכלה, והוא אכן לא מתיישב עם התפישה המדעית החדשנית המזוהה עם המהפכה המדעית והעת החדשה. עם זאת, מערכת הצנזורה נותרה בעינה.

בניגוד לדעה הרווחת לגבי חומרת הצנזורה הישועית, רבקה פלדחי טוענת כי אחד מהחלקים החשובים שהתקיימו במערכת הפיקוח הזו היה דווקא ההכללה והקבלה של חידושים. לטענתה, מה שאפשר את קיום ושגשוג המדע הישועי במשך זמן כה רב, ואפשר את קיומו לצד התפתחויות ותצפיות מדעיות יוצאות דופן, הוא שלמרות הצנזורה והקיבעון של תחומי ידע מסורתיים, דעות לא מסורתיות מסוימות הצליחו לחדור לתוך מערכת ההשכלה. כדי לקיים במקביל את גוף הידע השמרני ואת הדיאלוג המדעי העכשווי, החלה שיטה מיוחדת בחברה הישועית. דעות חדשניות מסוימות לאו דווקא נאסרו ללימוד או לדיון, ואלה שאושרו ללמידה ולדיון נכנסו לעולם הידע הישועי. נערכו בהם דיונים פתוחים, והם הוצגו כתרגילי הפרכה או כבעיות שלא נפתרו עדיין בעזרת הידע המסורתי. כך למשל, עם גילוי ירחיו של צדק על ידי גלילאו, שיבח אותו כריסטופר קלאוויוס (Cristopher Clavius, 1538 – 1612), מתמטיקאי ואסטרונום ישועי בן זמנו, על התצפית המדויקת. לאחר שכשלו מאמציו להבין את התופעה, קרא

[7] Allan P. Farrell. **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599.** Washington D.C: Conference of Major Superiors of Jesuits, 1970. p. 25. "It should be the set purpose of the teacher… to inspire his students to the love and service of God".

[8] Farrell. **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599.** p. 25. "He should submit theses to the prefect for review before they are published".

למדענים אחרים ולתלמידיו לנסות ולהבין את משמעותה, שכן את פירושו של גלילאו לבעיה, שהתבסס על התיאוריה הקופרניקאית, לא יכול היה לקבל. [9]

שיטה זו אפשרה דיון מדעי במסגרת המדע בן זמנם של הישועים, יחד עם שימור של עקרונות וערכי המדע ימי הביניימי. הישועים היו, מבחינה השכלתית ומדעית, ממשיכיהם של ימי הביניים אל תוך העת החדשה.

1. 3. מתמטיקה בימי הביניים ובעת החדשה

המתמטיקה בימי הביניים לא הייתה תחום מחקר פעיל. כהמשך לאימפריה הרומית, גם בימי הביניים המתמטיקה שימשה בעיקר לענייני היומיום - מסחר, ארכיטקטורה וכדומה. הידע המתמטי השימושי הועבר בצורה אוראלית כאוסף של פרקטיקות ולא כגוף ידע תיאורטי. מצב זה השתנה רק עם פרסומו של הספר **Liber abacci** של פיבונאצ'י (Fibonacci) במאה ה- 13. גם המתמטיקה כאומנות חופשית לא הייתה מפותחת כגוף ידע מלוכד ועסקו בה אנשים בודדים באופן יחידני. רוב העבודה המתמטית בימי הביניים הייתה בעקבות מעט טקסטים מתמטיים יוניים שנשמרו בארצות אירופה, עוד מיוון העתיקה. העבודה המתמטית עצמה לא הייתה חדשנית, אלא עסקה בהפניית הטקסטים המתמטיים לשאלות שהיו מהותיות למלומדים בימי הביניים, שהיו בעיקר שאלות דתיות. המתמטיקה לרוב שירתה כלים פילוסופיים ופדגוגיים, ולא עסקו בה למען המחקר המתמטי.[10]

בשלהי ימי הביניים, במאות ה- 12 וה- 13, החלו כתבים מתמטיים רבים לחדור לאירופה עם התפתחות המגעים עם העולם הערבי בספרד, בסיציליה ואזורי החיץ של הממלכות הצלבניות במזרח. בין הכתבים היו כתבים יוניים עתיקים שאבדו במסורת האירופאית ושבו לאירופה בתיווך מתרגמיהם הערבים, וגם עבודותיהם המתמטיות המתקדמות של המתמטיקאים הערבים, שהגיעו לראשונה לאירופה. עם חדירתם של הטקסטים המחודשים חודש המחקר המתמטי, ולמרות שלא הפך להיות תחום מחקר מרכזי באוניברסיטאות אירופה, החלו אנשים רבים יותר לעסוק בו.

יחד עם זאת מקומה של המתמטיקה בהשכלה הימי ביניימית היה בעייתי ומעורער מאוד. למרות ששיטות מתמטיות היו בשימוש בתחומי המדעים המתמטיים, כגון אסטרונומיה, פיזיקה ומוזיקה, המתמטיקה לא נחשבה למדע עצמאי. ההגדרה האריסטוטלית למדע מחייבת שהמדע יעסוק במושאים פיזיים ודרך ההסקה תהיה היקש לוגי. מתמטיקה היא "מדע" העוסק במושאים רעיוניים, ושאינו משתמש בסילוגיזם לוגי כדרך היסק אלא בהיקש מתמטי. לכן היא לא נחשבה למדע בפני עצמה, אלא כלי למדעים אחרים. משום כך, היא לא

[9] רבקה פלדחי וקיי מרצל. "טקסטים מתמטיים בהקשר תרבותי: מדע ישועי בראשית העת החדשה." **זמנים: רבעון להיסטוריה**, 1999, גיליון 66, עמודים 64-76. עמ' 70-72.

[10] Michael S. Mahoney, "Mathematics" In **Science in the Middle Ages.** ed. David C. Lindberg, Chicago: University of Chicago Press, 1978, pages. 145-178. pp. 146-147.

נלמדה כמדע, ועסקו בה באופן שולי מאוד במסגרת לימודי המדעים. רק תלמידים מעטים, שבחרו להתמקד במתמטיקה כמקצוע לימוד, בניגוד לתפיסה המסורתית, עסקו בה.[11]

עם סוף ימי הביניים ותחילת הרנסנס, החלו גורמים נוספים להשפיע על העיסוק המתמטי. שינויים רעיוניים, חברתיים ופוליטיים גרמו ללחץ כבד על מתמטיקאים לזנוח את העיסוק המתמטיקאי התיאורטי לטובת יישומים שונים של המחקר המתמטי. כך לדוגמא הופעת הנשק החם גרם לצורך בתכנון ביצורים ובכוונון תותחים, וכך הרעיונות ההומניסטיים החדשים לגבי אדריכלות והצורך לתכנן מחדש כנסיות, גילוי הפרספקטיבה באומנות הציור והצורך בניהול חשבונות הפכו את המתמטיקה מעיסוק שולי לעניין תרבותי מרכזי.[12] נוכל לראות זאת גם מסקירה ביוגרפית של מתמטיקאים שונים בני התקופה. לדוגמה, מן הסקירה של הביוגרפיה של ניקולו פונטנה טרטליה (Niccolo Fontana Tartaglia, 1499 - 1557). בעוד שטרטליה זכור כיום למתמטיקאים בעיקר בזכות עבודתו לפתרון משוואות ממעלה שלישית, בין עבודותיו הגדולות והמהותיות ביותר בזמנו הייתה עבודתו בבליסטיקה. עבודה זו הוקדשה לדוכס אורבינו פרנצ'סקו מריה הראשון דלה רובר (Francesco Maria I della Rovere, Duke of Urbino), מתוך ניסיון להפגין את נאמנותו לצבא. נוסף על כך הוא גם עסק בהעלאת ספינות טבועות, חליפות צלילה וחיזוי אוויר, ככל הנראה גם מטעמים פרקטיים ומצרכי החברה.[13]

במסגרת המסדר הישועי, המתמטיקה קיבלה מעמד נחות במיוחד משום שהיא נתפסה כתחום שאינו מוביל אל המטרה הדתית, שלשמה נערכים הלימודים במסגרת הישועית, וארחיב על כך בהמשך.

---

[11] Smolarski, "The Jesuit Ratio Studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities." pp. 448-449.

[12] לקריאה נוספת ראו: Paul Lawrence Rose, **The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo**, Travaux d'Humanisme et Renaissance, 1975.

[13] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Tartaglia biography**. September 2005. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html.

2. המתמטיקה הישועית

2. 1. כריסטופר קלאוויוס (Christopher Clavius) ותכנית הלימודים הישועית

אחד מהמתמטיקאים הבולטים בראשית ימי המסדר הישועי, שעזר לעצב את מקום המתמטיקה בהשכלה הישועית ובכלל בראשית העת החדשה היה כריסטופר קלאוויוס (1538 - 1612). קלאוויוס נולד בבמברג שבגרמניה. בשנת 1555 הצטרף למסדר הישועי ונשלח לרומא. שנה לאחר מכן נשלח ללמוד בקולג' הישועי שהוקם באוניברסיטת קוימברה, פורטוגל. עוד בלימודיו הכללים הוא בלט מאוד ביכולותיו בתחומי המתמטיקה. כנראה שבפורטוגל הקדיש קלאוויוס חלק לא מבוטל מזמנו ללימודי המתמטיקה, משום שרק בזמן שהותו שם שהה במוסד שהיו בו פרופסורים למתמטיקה (בזמן בו שהה ברומא לא היו מורים למתמטיקה בבתי הספר הישועיים בעיר). בשנת 1560 החליט להקדיש את חייו לחקר המתמטיקה והאסטרונומיה, זאת בעקבות ליקוי חמה שהתרחש באותה השנה והשפיע עליו עמוקות. באותה שנה הוא נסע לקולגיו רומנו ברומא כדי להמשיך את לימודי התיאולוגיה שלו. ב- 1561 למד פיזיקה ומטפיזיקה, ושנה לאחר מכן החל בלימודי התיאולוגיה המתקדמים. בשנת 1564 הוסמך קלאוויוס לכמורה, אך נשאר בקולגיו רומנו כדי להמשיך את לימודיו והחל ללמד שם מתמטיקה, תפקיד אשר מילא עד למותו (מלבד כמה גיחות לבתי ספר ישועיים נוספים באירופה). לימודי התיאולוגיה שלו הסתיימו בשנת 1575, ואז גם הצטרף באופן רשמי למסדר הישועי. בין מפעליו החשובים היו תרגומים מוארים ל**ספירה** של סקרבוסקו (Sacrobosco) ושל **היסודות** של אוקלידס, ששימשו כספרי לימוד נפוצים בכל אירופה. תרגום **היסודות** אף זיכה אותו בתואר "האוקלידס של זמנו".[14]

קלאוויוס ראה את המתמטיקה כמדע העליון על כל המדעים. הוא החזיק בתפיסת עולם אפלטונית לגבי המתמטיקה, וטען שהיכולת האנושית לתאר את מדעי הטבע בצורה מתמטית נובעת משום שהיקום עצמו בנוי בצורה מתמטית. קלאוויוס הכיר בכך שהאינטלקט האנושי הוא מוגבל, ולכן אין ביכולת האדם להבין את המבנים האמתיים של היקום באופן ישיר, כלומר באופן המבטיח ידיעה אבסולוטית. לדעתו, על האדם להסיק את מבנה היקום מהתופעות בהן הוא חוזה. העובדה שהאדם יכול לתאר את העולם בצורה מתמטית (למשל, אסטרונומיה) מעידה על כך שהיקום בנוי בצורה מתמטית. יש לשים דגש על כך שהמתמטיקה שאליה מתייחס קלאוויוס היא בעיקרה גיאומטריה אוקלידית. לא רק שזו יכולה לשמש לתיאור של תופעות פיזיקליות ובכך לתאר את העולם, המתמטיקה הזו גם בנויה בצורה היררכית (טענות שיוצאות מהנחות ומהן יוצאות עוד טענות וכך הלאה) בדומה למדעים עצמם, לכנסייה הקתולית ולעולם הנוצרי כולו.[15] המתמטיקה אצל קלאוויוס קיבלה משמעות דתית ומשמעות פיזיקלית. השילוב הזה מעמיד אותה במקום ייחודי, בטוח בעולם ההיררכי של ההשכלה הישועית, שבו המדע כפוף לפילוסופיה

---

[14] James M. Lattis, **Between Copernicus and Galileo, Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology**. Chicago: The University of Chicago Press, 1994. pp. 12-20.
Romano Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus in Addiscendis Disciplinis Matematicis' and the Teaching of Mathematics in Jesuit Colleges at the Beginning of the Modern Era." **Science & Education**, 2006, volume 15, pages 235-258. p. 235.

[15] Rivka Feldhay, **Galileo and the Church: Political Inquisition or Critical Dialogue.** New York: Cambridge University Press, 1995. p. 217.

ולתיאולוגיה. בשביל קלאוויוס המתמטיקה היא המייצגת הנאמנה ביותר של האלוהות, ולכן היא מקבלת משמעות אלוהית.

קלאוויוס היה אחד מהמתמטיקאים המשמעותיים ביותר של המסדר הישועי ופעל להכנסת לימודי המתמטיקה למערכת הלימודים הישועית. מפעלו החשוב ביותר היה ככל הנראה הכנסת לימודי המתמטיקה לרציו סטדיורום, הקובץ המגדיר את תכנית הלימודים של מערכת החינוך הישועית.

הבעיה העיקרית של המתמטיקאים הישועים בתקופתו של קלאוויוס הייתה שמסגרת החינוך הישועית לא עודדה את לימודי המתמטיקה, ולא עודדה את תלמידיה לעסוק בתחום. מתוך מערכת ההשכלה הישועית צמחו באופן טבעי פילוסופים ותיאולוגים רבים, שהיו חלק לא מבוטל מהדיון בן זמנם בתחומם. בניגוד לכך, מתי מעט מן הישועים עסקו במתמטיקה, וגם זה היה באופן עצמאי, שלא נתמך על ידי המסדר. כמו המלומדות הימי ביניימית, המתמטיקה אצל הישועים נחשבה לתחום נחות שמטרתו רק לשרת את המדעים המתמטיים. יש לזכור שמטרתם של אלה בראשית החינוך הישועי הייתה לשרת את לימודי הפילוסופיה והתיאולוגיה, מה שהציב את המתמטיקה במקום נמוך ביותר בהיררכית הידע הישועית. חשוב לשים לב לכך שמחוץ למערכת ההשכלה הישועית, תקופה זו הייתה תחילתה של פריחה מתמטית ברחבי אירופה, ואיטליה במיוחד.[16]

רוב המתמטיקאים הישועים אם כך, הצטרפו למסדר לאחר שרכשו את השכלתם המתמטית באוניברסיטאות שונות ברחבי אירופה, ולא למדו מתמטיקה במסגרת לימודיהם במסדר. דבר זה גרם למיעוט בפרופסורים למתמטיקה, וזה בתורו גרם לכך שרק במוסדות ישועים בודדים עסקו במתמטיקה, וגם שם, לא באופן מפורט ומורחב.[17]

אם המתמטיקה נחותה משום שהיא לא משרתת את התיאולוגיה ומשום שהיא לא נחשבת למדע עצמאי, כדי להצדיק את לימודי המתמטיקה היה על המתמטיקאים להוכיח שהמתמטיקה היא מדע, ושהיא תורמת וחיונית ללימודי התיאולוגיה והפילוסופיה. ואכן, מתמטיקאים ישועים רבים עשו זאת. נסמכים על מסורת מתמטית ארוכת שנים, הם ציטטו פילוסופים ומתמטיקאים כמו אפלטון, הירונימוס, בזיליוס ואוגוסטינוס כדי להוכיח את תרומת המתמטיקה להבנת הפילוסופיה והתיאולוגיה.[18] למשל, כתב קלאוויוס:

> [בספרו על הדוקטרינה הנוצרית] אוגוסטינוס מסביר במיומנות רבה ובעזרת טיעונים רבים, כמה תועלת התחומים האלה [המדעים המתמטיים] תורמים לפרשנות של כתבי הקודש, ומדגים שאנשים רבים הבורים במדע המספרים, לא מבינים את הדברים האלה שמוצגים בשפה מיסטית ומטפיזית...[19]

---

[16] לקריאה נוספת ראו: Paul Lawrence Rose, **The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo**, Travaux d'Humanisme et Renaissance, 1975.

[17] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus' p. 236.

[18] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus' p. 240. Lattis, **Between Copernicus and Galileo**. p. 36.

[19] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus' p. 240.

כדי להוכיח שהמתמטיקה יכולה לשמש כמדע, ייחס קלאוויוס לאובייקטים מתמטיים קיום "פיזיקלי ובו בזמן ריק ממהות חומרית", וכך טען כי המתמטיקה נמצאת בין הפיזיקה למטפיזיקה.[20]

> משום שהתחומים המתמטיים עוסקים בדברים שנחשבים לנפרדים מכל מהות חומרית, למרות שהם [התחומים המתמטיים] טבועים בכל חומר, נובע שהם נמצאים באמצע בין מטפיזיקה למדעי הטבע, אם נתייחס לנושא שלהם, כפי שפרוקלוס (Proclus) הוכיח ובצדק, כי הנושא של המטפיזיקה הוא נפרד מכל חומר, גם במושא [the thing] וגם בנימוק [reason]: הנושא של פיזיקה [הוא אכן] חבור לחומר, גם במושא וגם בנימוק: בעוד שמשום שהנושאים של התחומים המתמטיים נחשבים לחופשיים מכל חומר, למרות שהוא [החומר] נמצא בדבר עצמו, ברור שהם נמצאים בין השניים האחרים.[21]

כדי להצדיק את הדדוקציה המתמטית קלאוויוס טען שהיא בטוחה יותר מחלק מהצורות של סילוגיזם, שכן הנחות היסוד של המתמטיקה הן עקרונות ברורים ולעולם לא ישמש במתמטיקה עיקרון שלא הוכח כבסיס לטענה (זאת למשל בניגוד למדע המשתמש בעיקרון מטפיזי כלשהו כצידוק לטענה).[22] כדי לענות על ההגדרה האריסטוטלית למדע, המחייבת סילוגיזם ככלי היקש, בתרגומו ל**יסודות** של אוקלידס הוכיח קלאוויוס את ההוכחה הראשונה של אוקלידס בעזרת סילוגיזם לוגי, וטען שבאותו אופן ניתן להוכיח כל טענה בצורה סילוגיסטית.[23] לאחר שנים של שכנועים וטיעונים, לא יכלו הפילוסופים והתיאולוגים הישועיים לעמוד אל מול טיעוני קלאוויוס והמתמטיקאים האחרים, ולימודי המתמטיקה החלו באופן ממוסד במסדר הישועי. חשוב לציין שהכנסת המתמטיקה אל סדר הלימודים לא הייתה הכרה רשמית במקומה של המתמטיקה כמדע, או הכרה כלשהי בחשיבותה של המתמטיקה. בפועל, רק פחתה ההתנגדות ללימודי המתמטיקה וניתנה האפשרות ללמד מתמטיקה במסגרת החינוך הישועי.

בשנת 1581 הוציא קאלוויוס לאור את ספרו - **Ordo Servandus in Addiscendis Mathematicis**, (הסדר שיש לשמור בדיסציפלינות המתמטיות הנלמדות) תכנית לימודים מפורטת, שייעד ללימודי המתמטיקה במסדר. התכנית השאפתנית הקיפה 22 טקסטים מתמטיים שונים שיועדו ללימוד באופן הדרגתי. במקומות רבים קלאוויוס כתב שיש להוציא גרסאות עדכניות יותר מאלה הקיימות, משום שאלה לא התאימו למערכת ההשכלה בת זמנו. את חלקן מאוחר יותר הוא כתב ופרסם בעצמו. התכנית הראשונית יועדה להכשרת פרופסורים למתמטיקה. אחריה פורסמה תכנית שנייה, מקוצרת מעט (מקיפה רק 19 טקסטים), שהיא גרסה מעודכנת של הראשונה. אחרונה פורסמה תכנית לימודים מתמטית בהיקף מצומצם אף יותר, שיועדה לכל תלמידי בתי

---

[20] Feldhay, **Galileo and the Church**. p. 215. Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus'. p. 240. אם כך, המתמטיקה עוסקת באובייקטים קיימים, אך מופשטים מצורה חומרית. קיומם של האובייקטים המתמטיים הוא משמעותי, ואעסוק בו יותר מאוחר.

[19] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Feldhay, **Galileo and the Church**. p. 215. הטיעון הזה הוא טיעון מעניין, לא רק משום שהוא מכניס את המתמטיקה להירכיית הידע האריסטוטלי, אלא גם משום שהוא מבסס את הקשר בין המתמטיקה והפיזיקה. הטיעון הזה הוא ההתחלה של המתמטיזציה של מדעי הטבע בהשכלה הישועית, שההשפעות שלה ניכרות בתזות וברעיונות של גולדין.

[22] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus' p. 241.

[23] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus' pp. 241-242.

הספר הישועיים. קלאוויוס פרסם את שלוש התכניות בתקווה שהן ייכנסו לרציו סטדיורום, וכל התלמידים הישועיים יחוייבו ללמוד מתמטיקה כחלק מלימודי החובה שלהם, גם אם לא בחרו להתמקד בשדה זה.[24]

תכנית הלימודים השאפתנית של קלאוויוס אמנם לא התקבלה כמו שהיא, אבל פעולותיו הובילו למספר צעדים חשובים. הראשון, היה כניסת הלימודים המתמטיים לרציו סטדיורום שפורסם בשנת 1586, ולגרסתו הסופית שפורסמה בשנת 1599. אמנם עדיין רק בודדים מהמוסדות הישועיים יכלו באמת לאפשר את לימודי המתמטיקה, אבל היה זה צעד ראשוני לקראת כניסה של הלימודים המתמטיים לממסד הישועי באופן רחב יותר. בשנת 1593 נשא קלאוויוס נאום בדבר מצב הלימודים במסדר הישועי. קלאוויוס טען שבעוד ההשכלה הישועית בפילוסופיה ובתאולוגיה היא אכן הטובה ביותר, הרי שרמת ההשכלה במקצועות אחרים (מתמטיקה, לוגיקה, היסטוריה, מדעים, יוונית ועברית) הרמה בבתי הספר הישועיים נמוכה בהרבה מבתי ספר קתוליים אחרים ומבתי ספר פרוטסטנטים. בעקבות הנאום הסכים אב המסדר באותו זמן, קלאודיו אקואויוה (Claudio Acquaviva) על החלת תכנית לימודים מיוחדת, שבמסגרתה ייבחר מכל פרובינציה תלמיד אחד עם נטייה טבעית למתמטיקה ויישלח ללמוד מתמטיקה ברומא במשך שנה, לאחר שישלים שלוש שנות לימודי פילוסופיה. אותם תלמידים יחויבו גם ללמד מתמטיקה במשך שנתיים לפני שיוכלו להתחיל ללמד פילוסופיה או תיאולוגיה.[25]

2. 2. ה- Ratio Atque Institutio Studiorum Societatis Iesu והמתמטיקה בתכנית הלימודים הישועית

ה - **Ratio Atque Institutio Studiorum Societatis Iesu**, התכנית הרשמית להשכלה הישועית, הוא מסמך שפורסם בשנת 1599, והכיל טיפול מקיף בנושאי הלימוד הנלמדים בחברה הישועית, באופן העיסוק בהם ובשיטות הלימוד. טיוטה ראשונה למסמך נכתבה בשנת 1586, ונוספת ב- 1591, אך השינוי המהותי בתכנית הלימודים המתמטיקה הוא בין הנוסח של 1586 לנוסח הסופי שפורסם בשנת 1599, ובהם אתמקד.

בעקבות ההתרחבות חסרת התקדים של מערכת החינוך הישועי, עלה הצורך בהגדרה מדויקת יותר של חומר הלימוד ואופן העיסוק בו בחברה הישועית. עד לתחילת העבודה על הרציו סטדיורום לא הייתה תכנית רשמית ואחידה ללימודים במסגרת המסדר. הקווים הכלליים של החינוך הישועי היו אותם אלו שהגדירו את המחשבה והתיאולוגיה הישועית- סכולסטיקה תומסית ופילוסופיה אריסטוטלית, אבל הם לא הוגדרו באופן מדויק יותר. הפחד ממינות ומחוסר אחידות תיאולוגית במסדר הישועי עודד את ראשי המסדר וראשי מערכת החינוך הישועית לגבש מסמך שיתאר באופן מפורט את תחומי הלימוד שיעסקו בהם באוניברסיטאות הישועיות, ואת שיטות הלימוד בהם ינקטו המורים במסדר.

[24] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus'. pp. 243-246.
[25] Gatto, "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus'. p. 248.

בשנת 1581 אב המסדר קלאודיו אקואויוה מינה וועדה בת שנים עשר חברים שתפקידה היה לשרטט את הקווים הכלליים לתכנית לימודים כוללת לכל בתי הספר הישועיים. המטרה הייתה לייצר תכנית לימודים גלובלית, המקיפה את כל הידע הנחוץ לתלמיד ישועי, ויוכלו ללמד לפיה בכל בית ספר ישועי ברחבי העולם כולו. בשנת 1581, כהכנה לעבודת הוועדה, כתב קלאוויוס שתי מסות אודות לימודי המתמטיקה, שעזרו לעצב את תכנית הלימודים המתמטית ברציו סטדיורום.

לאחר חמש שנות עבודה פורסמה הגרסה הראשונה של תכנית הלימודים, ה רציו סטדיורום של שנת 1586. בשלב זה הרציו פורסם רק בצורה מצומצמת, ככל הנראה רק למצנזרים, למורים ולמרצים המנוסים בהוראה בבתי הספר של המסדר הישועי, כדי שיעבירו עליו ביקורת. על המסמך הראשוני נמתחה ביקורת קשה, בייחוד על הטיפול שלו במדעים המתמטיים ובמתמטיקה עצמה. התיאוריה של קלאוויוס לגבי מקומה של המתמטיקה בהיררכית הידע ולגבי המתמטיזיצה של מדעי הטבע, שעל פיה נכתבה תכנית הלימודים, נחשבה לכפירה במבנה ההשכלה התומסית. המסמך נחשב למרחיק לכת עד כדי כך, שמספר מלומדים ישועים כתבו מסות כנגדו, ואחד אף שלח אותו אל האינקוויזיציה הספרדית.[26] לא ברור אם האינקוויזיציה קבעה שיש ברציו סטדיורום משום מינות או לא, אבל התגובה הקשה גרמה לשינוי מהותי במסמך. הוועדה התכנסה מחדש כדי לתקן את תכנית הלימודים, ולאחר שלוש-עשרה שנה, בשנת 1599, פורסמה גרסתו הסופית של הרציו, והוא הופץ ברחבי העולם הישועי כולו.[27] השוני הדרסטי בין הגרסאות של הרציו תורם רבות להבנתנו את היחס למתמטיקה ולמדעים המתמטיים בתוך המסדר הישועי. הוא תורם להבנת השוני בין תפישת העולם של מתמטיקאים ישועים ובין תפיסת עולמם של שאר אנשי המסדר - פילוסופים ותיאולוגים.

יש נקודות שוני מהותיות בין התפיסה המתמטית של קלאוויוס והמתמטיקאים הישועים, לבין התפיסה המתמטית הרשמית שהתקבלה במסדר והתפרסמה בגרסתו הסופית של הרציו סטדיורום בשנת 1599. הרציו מכיל שני חלקים החשובים לניתוח ולהבנת תכנית הלימודים המתמטיים. הראשון, החוקים הכללים לכלל מורי המסדר, והחוקים למורי הפקולטה לפילוסופיה. השני, ההוראות הספציפיות לפרופסור למתמטיקה.

בין החוקים לכל מורי המסדר, נכתב כי "על המורה להקפיד [שבמהלך הדיון] יעקבו התלמידים אחר צורת הטיעון הסילוגיסטית באדיקות."[28] במיוחד במהלך דיונים בהם משתתפים תלמידים ישועים. הקפדה זאת מסרסת את הטיעון המתמטי, שאינו עומד בכללים האריסטוטליים לטיעון הסילוגיסטי. טיעון סילוגיסטי הוא טיעון לוגי המורכב משתי הנחות מהן נובעת, לפי כללי ההיקש הלוגיים האריסטוטליים, מסקנה יחידה. הטיעון המתמטי הגיאומטרי של העת החדשה אינו כתוב בצורה סילוגיסטית, אלא בצורה דדוקטיבית אינטואיטיבית[29], ולכן לא עומד בתנאי

---

[26] Dennis C. Smolarski, "The Jesuit Ratio Studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities." p. 452.

[27] Feldhay, **Galileo and the Church**. pp. 219-223.

[28] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Farrell, **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599.** p. 27.

[29] Jan Von Plato, **Proof Theory Development.** 2014. https://plato.stanford.edu/entries/proof-theory-development/#PreNotPro

הסילוגיסטי. אמנם קלאוויוס בשיטתו הצליח לעקוף מעט את הצורך במערכת הטיעון הסילוגיסטית, אך ברור לכל שכאשר כל תלמידי המסדר לומדים בכל שנותיהם לפי צורת טיעון סילוגיסטית ומוריהם מקדשים אותה כצורת הטיעון היחידה לקבלת האמת, יורדת קרנה של המתמטיקה, שאינה מתבססת על סילוגיזם.

בהוראות למורי הפילוסופיה, ישנן שתי נקודות המהותיות ללימודי המתמטיקה, והן עיגונם של הלימודים הפילוסופיים בפילוסופיה של אריסטו ובתיאולוגיה של תומס אקווינס.

- אין עליו לערער על אריסטו בעניינים חשובים, אלא אם הוא מוצא דוקטרינה מסוימת נוגדת את שיטות הלימוד המקובלות או, יותר משמעותי, מנוגדת לאמונה האמתית...
- הוא תמיד צריך לדבר בשבחי הקדוש תומאס, לעקוב אחריו בנכונות היכן שכדאי, לחלוק עליו עם כבוד ועם אי רצון מסוים כאשר הוא מוצא אותו פחות מקובל...
- עליו להתחיל בדיון מלא יותר לגבי מדע בסוף השנה הראשונה ובו הוא צריך לכלול נושאים מרכזיים מן ההקדמה לפיזיקה, כמו החלוקה של המדעים והשוני בשיטה בין מתמטיקה ופיזיקה, שאריסטו עוסק בהם בספר השני של הפיזיקה.[30]

סעיפים אלה הם סעיפים המבטלים את הניסיון של קלאוויוס ושאר המתמטיקאים בני תקופתו לשנות את היררכית הידע בחברה הישועית, ולהכניס את המתמטיקה כדיסציפלינה הנפרדת מן הדיסציפלינות המוכרות, ונמצאת בין הפילוסופיה לפיזיקה. הם מכפיפים את הלימודים במסדר הישועי להיררכית הידע התומסית, שבה למתמטיקה תפקיד שולי למדי. נוסף על זאת, הסעיף האחרון מציין את ההפרדה של המתמטיקה מן "המדעים המתמטיים", ומנתק אותה ממהות חומרית, ואותם ממהות רעיונית, כפי שאריסטו מכונן **בפיזיקה**.

בפרק העוסק בלימודי המתמטיקה עצמם, הדבר המשמעותי ביותר הוא הצמצום. ברציו סטדיורום של שנת 1586 הופיעה בפרק למורי המתמטיקה פתיחה בסגנון אפולוגטי (ככל הנראה בהשראת הכתיבה של קלאוויוס) שהכילה בתוכה את התזה לגבי מיקומה של המתמטיקה בהיררכית הידע ואת היחס בין המתמטיקה למדעים הפיזיקליים. הפרק עצמו פירט את תכנית הלימודים, חומרי הלימוד ושיטות הלימוד בצורה נרחבת ומקיפה. לעומת זאת, שלושה סעיפים בודדים מוקדשים לתכנית הלימודים המתמטית בגרסה הסופית של המסמך.

1. הוא צריך להקדיש לפחות שעה של לימודים בכיתה כדי להסביר את היסודות של אוקלידס לתלמידי הפיזיקה. אחרי חודשיים, כשהתלמידים שלו כבר מיודדים עם הנושא, כדאי שיוסיף מעט גיאוגרפיה או אסטרונומיה או נושא דומה אחר שהתלמידים אוהבים לשמוע לגביו...

2. כל חודש, או לפחות כל חודשיים, הוא ידרוש מתלמיד לפתוח בעיה מתמטית ידועה לפני קהל גדול של תלמידים הלומדים פילוסופיה ותיאולוגיה.[31]

[30] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Farrell, **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599.** pp. 40-42.

בניגוד למסות שכתב קלאוויוס למען עיצוב הרציו סטדיורום, ובניגוד לרציו של שנת 1586, תכנית הלימודים המתמטית במסמך הזה פחות מפורטת באופן משמעותי. לא מפורטים ספרי הלימוד או אילו פרקים על המורה להעביר בשיעור, והתכנית מתווה קווים כלליים בלבד. הסעיף השני הוא דווקא הישג למתמטיקאים ברציו סטדיורום, משום שהמתואר בו - הדיון הפומבי - הוא מסורת שהייתה נהוגה לגבי מקצועות אחרים בבתי הספר הישועיים. ההכנסה שלו לתכנית הלימודים המתמטית הוא דווקא שלב בהכללת המתמטיקה הישועית לתוך מערכת הלימודים הישועית, והכללת המתמטיקאים לתוך החברה הישועית.

הגרסה הראשונה של המסמך נכתבה ככל הנראה על ידי מתמטיקאי, שניסה לעגן את מעמדם החדש של המתמטיקה והמדעיים המתמטיים בתכנית הלימודים הכללית של המסדר ובכך לקבע את מעמדם. הגרסה השנייה עברה צנזורה מקיפה, ככל הנראה מידי חברי הפקולטה לתיאולוגיה שביקשו לרסן את התפיסה החדשנית לגבי לימודי המתמטיקה. מן הניתוח של המסמך, ניתן לראות את השינוי המהותי בתפיסות העולם בין שתי גרסאותיו. את השוני הראשוני והמהותי שעולה אפשר להבין עוד מעצם השינוי בתכנית הלימודים, והוא שבניגוד לעצמאות שרצו המתמטיקאים ביחס לדיסציפלינות המתמטיות ולמדעים המתמטיים, ההחלטה בנוגע לאלה התקבלה בסוף בידי הפילוסופים והתיאולוגים. ואכן, הלימודים המתמטיים הוכפפו לפילוסופיה ולתיאולוגיה. השני הוא הדחייה של המתמטיזציה של מדעי הטבע. זוהי נקודה בעייתית משום שבתקופה זו ועוד לפניה החלה המתמטיקה לגלוש לתוך התחומים המדעיים, וההקפדה על נקודה זאת עלולה הייתה לגרור ניתוק בין עולם המדע הישועי לבין השיח המדעי האירופאי המתפתח.

2. 3. המהות הרעיונית של המתמטיקה הישועית

לסיכום, מקומה של המתמטיקה במערכת הלימודים הישועית היה מורכב ביותר. מצד אחד, תכנית הלימודים הישועית, לפחות באופן רשמי, קרקעה את המתמטיקה ותחמה אותה בגבולות הסכולסטיים והאריסטוטליים של התחום. היא קבעה שהמתמטיקה נחותה על הפילוסופיה והתיאולוגיה, ואינה קשורה למדעים. מצד שני, קלאוויוס, המתמטיקאי שעיצב את החשיבה המתמטית הישועית, קשר את המתמטיקה לאלוהות, ובכך העניק למתמטיקה משמעות פיזיקלית ודתית שונה מהמקובל. מקומה השונה של המתמטיקה במבנה הידע שקלאוויוס ניסה לכונן העניק למתמטיקאים מעמד שונה מהרגיל במערכת האריסטוטלית. את המפלט מן הנחרצות והשוני המהותי שבין שתי התפיסות אפשר למצוא דווקא ברציו סטדיורום. המסמך לא קיבע באופן אחיד ומדויק את תכנית הלימודים המתמטית הישועית, ונתן לפרופסורים למתמטיקה מרחב עדין לתמרון - עדיין במסגרת הצנזורה והכללים של ההשכלה הישועית. בפועל, כפי שאצביע בפרקים הבאים, ניתן לראות שהתפיסה של קלאוויוס היא זו שהשתרשה בקרב המתמטיקאים והמדענים הישועים, והיא השפיעה רבות על השיח המדעי והמתמטי במסדר ובין מתמטיקאים חברי המסדר ובין מתמטיקאים אחרים.

---

[31] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Farrell, **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599**. p. 46.

3. חשבון אינפיניטסימלי במאה ה-17 ועיקרון קווליארי

3. 1. חשבון אינפיניטסימלי

חשבון אינפיניטסימלי (בעברית- חשבון האינסופיים) הוא חשבון העוסק באינפינטסימל - גודל חיובי קטן בצורה אינסופית. מקור השם מהמילה הלטינית Infinitesimal שפירושה קטן מאוד (בצורה אינסופית). החשבון האינפיניטסימלי הוא אבי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, שהתפתח ממנו והתבסס אחריו, במאה ה- 18 ואחריה. מקורות ראשוניים לחשבון האינפיניטסימלי מופיעים עוד ביוון העתיקה (המאה ה- 5 לפני הספירה) אצל אאודוקסוס וארכימדס (ישנם מקורות קדומים אף יותר, אבל הם פרגמטיים מאוד ולא מצביעים על פיתוח של שיטה מתמטית סדורה), שהשתמשו בשיטת אינפיניטסימליות שונות, ביניהן שיטת המיצוי (Method of Exhaustion) כדי לחשב שטחים ונפחים של גופים שאינם מצולעים (חישוב ראשוני של פאי למשל, נעשה בשיטה הזאת על ידי ארכימדס). חשוב לזכור שהחשבון האינפיניטסימלי היה מאוד לא מפותח בתקופה ההלניסטית, וגם לא נפוץ במיוחד.

מהעת העתיקה ועד לעת החדשה כמעט ולא היה עיסוק בחשבון אינפיניטסימלי באירופה. התוצאות של עבודותיו של ארכימדס אמנם היו מוכרות, אך הספרים שעוסקים בשיטות אינפיניטסימליות התגלו רק יותר מאוחר (בראשית המאה ה- 20). חלק מן התוצאות שהושגו בדרכים אינפיניטסימליות אמנם היו מוכרות, אבל התפיסה הרווחת הייתה שהשימוש באינפיניטסימל לא היה חיוני להשגת התוצאות, אלא, היה סגנוני בלבד (אלגנטי יותר מפתרונות אחרים), ושיש לכל ההוכחות שהושגו בצורה זו פתרונות בעזרת שיטות גיאומטריות מסורתיות, שהכותבים העתיקים בחרו לא להציג.[32]

אם כך, עד לתחילת המאה ה- 17 כמעט ולא היה עיסוק בחשבון אינפיניטסימלי באירופה. לא ברור מה בדיוק העלה את הדיון באינפינטסימלים למוקד הדיון המתמטי בעת החדשה. נדידה של רעיונות מתמטיים מהמזרח (הודו וארצות ערב) אל אירופה, ורעיונות פיזיקליים שחדרו אל הדיון המתמטי (בהשפעת גלילאו למשל) כנראה היו גורמים משמעותיים לתחילת הדיון המתמטי המחודש באינפיניטסימל. המתמטיקאים והפיזיקאים שחקרו את האינפיניטסימלי בתקופה הזו נחשבו למחדשים, ולא לממשיכי דרכם של הקדמונים. הגילוי המחודש של החשבון האינפיניטסימלי הוא כלל אינו גילוי אלא פריצת דרך מתמטית חדשנית.

---

[32] John J O'Connor and Edmund F. Robertson, **Cavalieri biography**. July 2014. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri.html.

טוריצ'לי למשל כתב:

"I should not dare affirm that this geometry of indivisibles is actually a new discovery. I should rather believe that the ancient geometricians availed themselves of this method in order to discover the more difficult theorems, although in their demonstration they may have preferred another way, either to conceal the secret of their art or to afford no occasion for criticism by invidious detractors."

3. 2. בונאבנטורה קווליארי (Bonaventura Cavalieri)

בונאבנטורה פרנצ'סקו קווליארי היה מתמטיקאי איטלקי בן המאה ה-17. קווליארי נולד במילאנו בשנת 1598, תחת השם פרנצ'סקו קווליארי. בשנת 1615 הוא הצטרף למסדר הג'סואטי (Jesuati) במילאנו, ואז גם לקח לעצמו את שם אביו - בונאבנטורה. המסדר אליו השתייך היה מסדר אוגוסטיני, שהוקם במאה ה- 14 במטרה לטפל בחולי המגפה השחורה. בזמנו של קווליארי המסדר כבר היה קטן מאוד, ושנים לא רבות לאחר מותו נסגר המסדר. בשנת 1616 עבר קווליארי למנזר הישועי בפיזה, שם נשאר עד לשנת 1620.

קווליארי נחשף למתמטיקה כאשר אל המנזר שבו גר בפיזה הגיע הנזיר הבנדיקטני בנדטו קסטלי (Benedetto Castelli). באותה תקופה הפך קסטלי לפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פיזה, תחת חברו הקרוב ומורו, גלילאו גליליי (Galileo Galilei). משום שלא היה בפיזה בתקופה ההיא מנזר בנדיקטיני, התגורר קסטלי עם הג'סואטים האוגוסטינים. קסטלי לימד את קווליארי גיאומטריה, וספציפית את המתמטיקה של אוקלידס ושל גלילאו, וקווליארי נשבה ברעיונותיהם.[33] עוד בשנותיו הראשונות הראה קווליארי כישרון רב במתמטיקה, ולעיתים אף החליף את קסטלי בהרצאותיו. קווליארי ראה את עצמו כתלמידי של גלילאו והעריץ אותו באופן אישי. בשנים 1641-1616 כתב לו מעל ל- 100 מכתבים, לחלקם המועט בלבד גלילאו טרח להשיב. בשנת 1619 ניסה להתמנות למשרת הפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת בולוניה (Bologna), אך לא קיבל את התפקיד. הוא ניסה להתקבל למשרות הוראה באוניברסיטאות שונות אך נדחה מכולן. יש עדויות שקושרות את הישועים לחוסר הצלחתו של קווליארי לקבל את המשרה[34], וקווליארי עצמו טען שככל הנראה השתייכותו למסדר הג'סואטי, שלא היה פופולארי באיטליה של אותם שנים, פגעה בסיכוייו.[35]

בשנת 1621 חזר קווליארי למילאנו והתמנה לדיאקון במסדר הג'סואטי שם החל לפתח את הרעיונות המתמטיים שעליהם יעבוד כל חייו ובגללם יתפרסם - הגיאומטריה האינדיביזיבילית. בשנת 1623 החל ללמד תיאולוגיה במילאנו, ובשנת 1626 הפך לראש המנזר (Prior) בלודי (Lodi). שנה לאחר מכן סיים לכתוב את ספרו הראשון, **Geometria indivisibilibus**, למרות שזה התפרסם קרוב לעשר שנים מאוחר יותר, ב- 1635. אחרי שלוש שנים בלודי הפך לראש המנזר בפארמה (Parma). בשנת 1629 התמנה לבסוף לפרופסור בבולוניה, משרה שהחזיק עד למותו. גלילאו היה מתומכי מינויו, וכתב על קווליארי, "מעט, אם בכלל, העמיקו כל כך לעומק מדע הגיאומטריה מאז ימי ארכימדס."[36]

במהלך 18 השנים ששהה בבולוניה, פרסם קווליארי אחד-עשר ספרים. המפורסמים שבהם היו הספר **Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota**, (שיטה מסוימת לפיתוח גיאומטריה חדשה של הרצף המורכב מאיברים שאינם ניתנים לחלוקה (אינדיביזיבליים)), שפורסם בשנת 1635, והספר **Exercitationes geometricae sex** (שישה תרגילים

[33] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Cavalieri biography**.
[34] Alexander, **Infinitesimal**. p. 95
[35] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Cavalieri biography**.
[36] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Alexander, **Infinitesimal**. p. 95.

גיאומטריים), שפורסם בשנת 1647, שהוא המשך וביאור לספר הראשון. הספר הראשון הציג לעולם המתמטי האירופאי את עיקרון קווליארי - עיקרון גיאומטרי אינפיניטסימלי שעוסק בחישוב יחסים בין שטחים ונפחים, ונחשב כיום לאבי האינטגרל המודרני. אך הספר, בן יותר מ-700 עמודים, זכה לביקורת רבה בזמן פרסומו. הוא נחשב לאחר מהספרים המייגעים ביותר, והקשים ביותר לקריאה שאי פעם נכתבו בשפה הלטינית.[37] הספר זכה גם לביקורות עקרוניות כנגד הגיאומטריה החדשה שהציג קווליארי. לאחר הביקורת הקשה על ספרו הראשון פרסם קווליארי את הספר השני, ובו הוא תיקן וביאר חלקים מהעיקרון שהוצג בספר הראשון, ופרסם גם הגנה על התיאוריה שלו.[38]

הרעיונות של קווליארי התפשטו במהרה בכל רחבי אירופה ועוררו (יחד עם רעיונות אינפיניטסימליים מוקדמים נוספים) תסיסה של השיטות האינפיניטסימליות באירופה. רבים מהמתמטיקאים בני תקופתו מייחסים את הבסיס לידע שלהם באינפיניטסימלים לספריו של קווליארי, ביניהם למשל טוריצ'לי (Evangelista Torriceli), שהיה מתמטיקאי ופיזיקאי איטלקי בן תקופתו של קווליארי שעסק גם הוא בחשבון אינפיניטסימלי, ופיתח והעמיק את הרעיונות של קווליארי.[39]

העניין המהותי הוא שרעיונותיו המורכבים והמופשטים של קווליארי לרוב הובנו רק באופן חלקי ולכן קיבלו פנים רבות בעבודותיהם של מתמטיקאים שונים. כך למשל טוריצ'לי ייחס את הבסיס לרעיונות המתמטיים שלו לקווליארי למרות שהאינפיניטסימליים שלו שונים במהותם מן האינפיניטסימליים של קווליארי. ההבדל המהותי ביותר, הוא הגישה האטומיסטית של טוריצ'לי, שטען כי הרצף המתמטי אכן בנוי מן האינפיניטסימליים. הבדל נוסף, הוא שבעוד האינדיביזיבילים של קווליארי הם קטנים בצורה אינסופית, השיטה האינפיניטסימלית כולה מושתת על שוויונם זה לזה. לעומת זאת טוריצ'לי טען, באופן פרדוקסלי משהו, שלנקודות שונות ייתכן ויהיו גדלים שונים ושלקווים אינדיביזיבילים שונים ניתן שיהיה עובי שונה.[40]

נוסף על עבודתו על במסגרת החשבון האינפינטסימלי, קווליארי חקר תחומים נוספים, וכתב ספרים על השימוש בלוגריתמים, באסטרונומיה ובאופטיקה. בין מחקריו הוא פיתח גם את "נוסחת לוטשי העדשות", שהיא נוסחה אופטית המתארת את הקשר בין עוצמת העדשה ובין מקדם השבירה של החומר ממנו עשויה, עובייה, ורדיוסי העקמומיות שלה.

קווליארי מת ונקבר בבולוניה בשנת 1647, לאחר שבמשך שנים בריאותו הלכה והתדרדרה. בשנותיו האחרונות כבר זכה להכרה גדולה יותר על עבודתו כמתמטיקאי, וקיבל הצעות ללמד באוניברסיטאות רבות, ביניהן אוניברסיטת פיזה. למרות זאת בחר להישאר בבולוניה

[37] קורעת לב מכל היא קרירותו של גלילאו לספר. קווליארי, שהעריץ את גלילאו כמתמטיקאי, שלח לו את הספר. מכתב התשובה של גלילאו לא נמצא בידנו, אבל תגובתו של קווליארי למכתבו של גלילאו כן, שכוללת התנצלות שבורת לב על כך שהספר אינו טוב וברור דיו.

[38] במסגרת הערצתו לגלילאו, רצה לקווליארי לכתוב את הספר בדומה לדיאלוג של גלילאו בספרו "דיאלוג על שתי מערכות העולם המרכזיות", כדיאלוג בינו ובין המתנגדים לשיטתו. הרעיון נגנז בגלל חבר שהמליץ לו לא להתגרות במתנגדיו, שהיו רבי כוח.

[39] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Cavalieri biography.**

[40] Alexander, **Infinitesimal**. pp. 107-117.

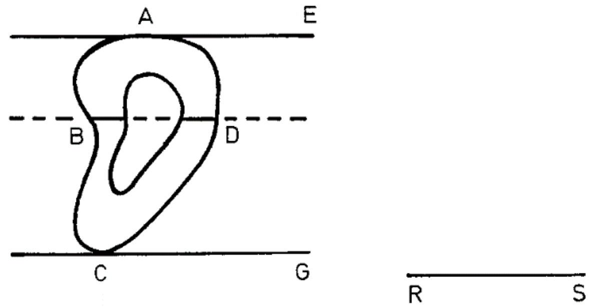
וללמד שם. לקראת סוף ימיו כבר חדל ללמד בשל מצבו הבריאותי הקשה. הוא מת ב- 30 בנובמבר 1647 ונקבר בכנסייה בעיר.[41]

3. 3. המתמטיקה של קווליארי

קווליארי ביסס את הגיאומטריה החדשה שפיתח על גופים מתמטיים שאינם ניתנים לחלוקה- indivisibilabus.[42] כלומר הוא "המציא" אובייקטים גיאומטריים חדשים, שהוא הגדיר לראשונה, שהם חלקים קטנים בצורה אינסופית, שאינם ניתנים לחלוקה - מעין חלקיקי יסוד, אטומים גיאומטריים. הדימוי שבו משתמש קווליארי כדי לתאר את האינדיביזיבילים שלו הוא חוטים דקים המהם טווים פיסת בד - כך עלינו לראות צורות גיאומטריות, כאילו היו בנויות מאינסוף קווים, דקים כך שעוביים אפסי.[43] כלומר, בקטע נתון יש אינסוף אינדיביזיבלים.

קצרה היריעה מלנסות ולהכיל כאן את כל התיאוריה של קווליארי, שמשתרעת על גבי מאות, אפילו אלפי עמודים. כדי להבין את האופי החדשני של המתמטיקה שמציג קווליארי ולאפשר בסיס להשוואה עם המתמטיקה הישועית אציג כאן את העקרונות הבסיסיים שמרכיבים את המתמטיקה שלו ואדגים (באופן די פרגמטי) פתרון בעיה מתמטית בעזרת שימוש באינדיביזיבילים.[44]

קווליארי בספריו מציג שתי שיטות שונות לשימוש באינדיביזיבילים, אחת המוצגת בששת כרכיו של ספרו הראשון, **Geometria indivisibilibus**, והשנייה מוצגת בספרו השני, **Exercitationes**. השיטה הראשונה מבוססת על הגודל "כל הקווים של צורה מסוימת", והשנייה מבוססת על עיקרון הנקרא על שמו, עיקרון קווליארי. אם כך, קווליארי התחיל את עבודתו בהגדרת האוסף "כל הקווים של צורה מסוימת". כדי ליצור את האוסף, קווליארי הגדיר את התהליך הבא (תמונה 1):



תמונה מס' 1, אילוסטרציה של קווליארי (עיבוד של אנדרסן), 1984

---

[41] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Cavalieri biography**.

[42] לעיתים מגבלות השפה מקשות לתאר את המתמטיקה של קווליארי, וקווליארי עצמו משתמש במספר דימויים העוזרים להבנתה, את חלקם אפרט. למרות זאת, יש לשים לב לדקויות לגבי מהות האינפיניטסימלים בעבודתו של קווליארי, ולהבדלים בינם ובין הדימויים.

[43] Alexander, **Infinitesimal.** p. 97. יש לשים לב שקווליארי מציין בפירוש שיש שוני בין הדימוי הפיזיקלי לבין האובייקט המתמטי- בעוד הבד טווי ממספר סופי של חוטים, הצורות הגיאומטריות בנויות מאינסוף קווים.

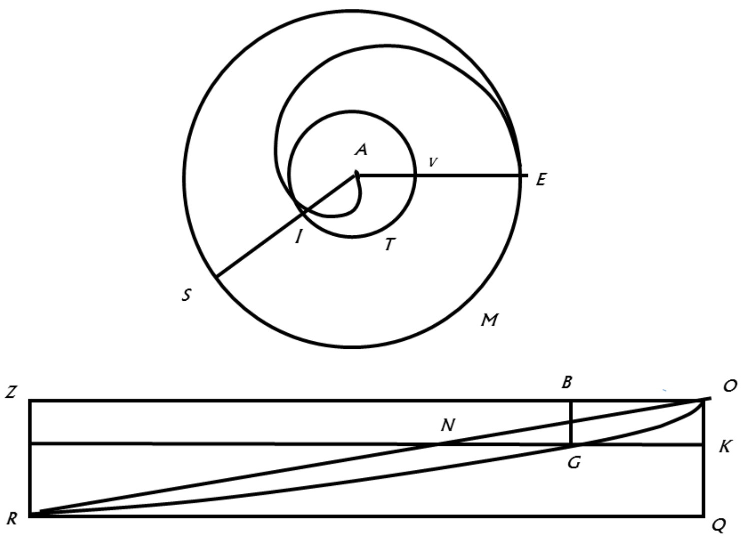
[44] Kirsti Andersen "Cavalieri's Method of Indivisibles." **Archive for History of Exact Sciences**, 1984, volume 31: pages 291–367.

תהי צורה כלשהי ABCD, וכיוון RS- "רגולה". קיימים שני משיקים לABCD אשר מקבילים לרגולה RS והם AE, CG. אם נזיז את המשיק CG (בכיוון האנך לרגולה) עד שיתלכד עם המשיק השני AE אזי כל הקווים שהמשיק CG ישרטט בזמן תנועתו לאורך הצורה ABCD מוגדרים להיות הגודל: "כל הקווים של הצורה ABCD, ביחס לרגולה RS".

לאחר מכן, קבע קווליארי שהיחס בין קבוצות קווים של צורות שונות, שנקבעו ביחס לאותה רגולה, זהה ליחס בין הצורות עצמן.[45] (נשתמש בסמל ∑ כדי לסמן את אוסף הקווים של צורה מסוימת) כלומר: יהיו צורות כלשהן G, F, אזי

$$G : F = \sum G : \sum F$$

העיקרון הזה מהווה את הבסיס לגיאומטריה שקווליארי בנה. קווליארי הסיק מסקנות נוספות לגבי אוספים שונים של קווים, ובעזרתן פיתח שיטות שהיום ניתן לומר שהן מקבילות לאינטגרל המודרני. נסקור דוגמה לפתרון בעיה גיאומטרית (הספירלה של ארכימדס במקרה זה) בעזרת השיטה שמציע קווליארי.



תמונה 2, הספירלה של ארכימדס לפי אילוסטרציה של קווליארי, 2016

יהי מעגל EMS, שמרכזו A. הרדיוס AE זז במהירות קבועה סביב מרכז המעגל, כאשר בזמן תנועתו, נעה במהירות קבועה על הרדיוס נקודה, ממרכז המעגל כלפי חוץ, ומסלולה מצייר את מסלול הספירלה. עלינו למצוא את היחס בין שטח המעגל ובין השטח החסום בין הרדיוס AE ובין העיקול AIE.

[45] Andersen, "Cavalieri's Method of Indivisibles". pp. 300- 302.

נבנה את המלבן RQOZ כך ש RQ יהי זהה באורכו להיקף המעגל ESM וOQ זהה באורכו לרדיוס המעגל AE.

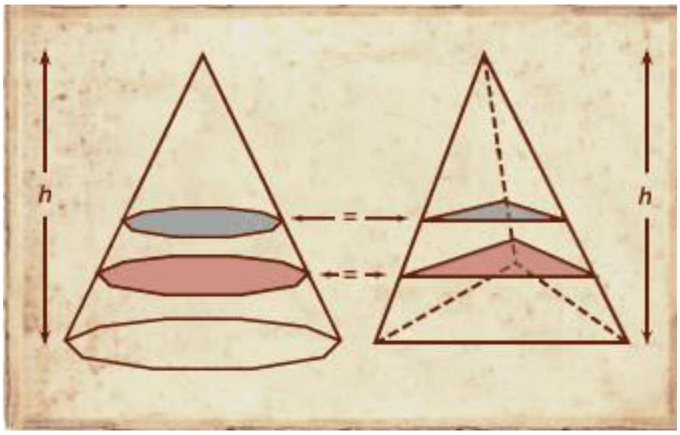
V היא נקודה על הרדיוס AE, ונבנה את המעגל שרדיוסו AV ומרכזו A. נקבע את הנקודה K על OQ כך ש AV:AE=OK:OQ.

המעגל VTI נחתך על ידי הספירלה AIE כך שהעיקול VTI נמצא מחוץ לספירלה. נשרטט קו באורך VTI בתוך המלבן RQOZ כך שהוא יוצא מנקודה K ומקביל לצלע RQ, ונסמן את נקודת סיומו G.

אם ניקח באופן זה כל נקודה V על הרדיוס AE, נשרטט בתוך המלבן את הפרבולה RGO.

מכאן קווליארי משתמש בשיטות שכבר הוכיח כדי לחשב את היחס בין שטח המלבן לבין השטח שמתחת לפרבולה.[46] משום שהיחסים בין הצורות עצמן - המעגל והעיקול, ובין אוספי הקווים- השטח שכלוא מתחת לפרבולה ושטח המלבן, זהים, היחס שיתקבל יהיה זהה ליחס השטחים שחיפש.

בספרו השני מציג קווליארי שיטה אינדיביזיבילית שנייה, שבחלקה נועדה לעקוף בעיות שעלולות לעלות מהשיטה הראשונה. השיטה מבוססת על עיקרון קווליארי. העיקרון אומר, שאם עבור שני גופים שונים, שטחי כל המישורים המתאימים (הנמצאים במרחק זהה מן הבסיס) זהים, אזי גם נפח הגופים עצמם זהה (ובאותו אופן גם צורות וקווים).



תמונה 3, עיקרון קווליארי, אנציקלופדיה בריטניקה, 2000

השיטה השנייה של קווליארי מתבססת על סופרפוזיציה - העתקה ומיקום של שטחים וגופים אחד על גבי השני. כדי לבדוק ששטחי הצורות המתאימות שוות, יש להעתיק אותן ולהניח אותן אחת על גבי השנייה. אם הן חופפות בצורה מלאה, אז שטחן שווה. אם הם לא חופפות באופן מלא, יש למקם את החלקים שאינם חופפים בין שתי הצורות אחד על גבי השני, ולהמשיך

[43] ההוכחה המלאה מופיעה אצל: Alexander, **Infinitesimal**. p. 100. Andersen, "Cavalieri's Method of Indivisibles". pp. 337-338.

באותו אופן עד שמגיעים לחפיפה מלאה בין הצורות. צריך לשים לב ששיטה זו פחות כללית מן השיטה הראשונה של קוואליארי - כדי שנוכל להשתמש בה, אנו חייבים לדרוש שהגופים המושווים יהיו בעלי אותו הגובה. מצד שני, שיטת הסופרפוזיציה מצליחה להרחיק במידת מה את השיטה המתמטית מן הדיון לגבי הרכבו של הרצף המתמטי, שהיה דיון פילוסופי מורכב בין הכנסייה והמתמטיקאים.[47]

כשניגשים לבחון את הגיאומטריה של קווליארי מנקודת מבט היסטורית חשוב להבין כמה מאפיינים חשובים שלה. הראשון, הוא שהתיאוריה אינה מוגדרת היטב. למעשה, רוב המושגים שקווליארי התייחס אליהם הם מופשטים ומוגדרים בצורה כמעט אופרציונלית, אם בכלל. כאלה הם למשל קבוצות כל הקווים של צורה מסוימת או קבוצת כל המישורים של גוף מסוים. קווליארי לא מבאר מהי משמעות הקבוצות הללו. האם אלה קבוצות של איברים נסכמים, כמו אינטגרלים מודרניים? או שהן דומות יותר לקבוצות מתמטיות - כל קו מסמל גודל, ועבור כל איבר בקבוצה ישנו איבר מתאים בקבוצה אחרת? חלקים שונים בתיאוריה שלו נוטים לכאן ולכאן, אך הוא עצמו לא הסביר את המשמעות של האובייקטים בהם עסק. השני, קווליארי השתמש בפעולות מתמטיות מוגדרות היטב על מושגים מתמטיים שאינם מוגדרים היטב. הגיאומטריה האוקלידית מגדירה תכונות מסוימות לגדלים (Magnitudes), וכן גם מגדירה יחסים בין גדלים ופעולות על גדלים.[48] מצד שני, היא גם קובעת שאינסוף הוא לא גודל, בעוד שקווליארי מכיל תכונות של גודל על קבוצות אינסופיות: יחס, חיבור, וכדומה על קבוצות גדולות בצורה אינסופית - כל הקווים של צורה מסוימת.

זהו בעיניי אחד החידושים המשמעותיים ביותר בתיאוריה של קווליארי: הוא לא בהכרח מנסה ליחס משמעות פיזיקלית למתמטיקה שלו, או לטעון טענה על הרכבו של העולם המתמטי. קווליארי מנסה לפתור בעיות מתמטיות ולהשיג תוצאות. השיטה שפיתח מפיקה תוצאות ולכן היא חשובה, ולא כי יש לה משמעות אבסולוטית לגבי טבע העולם. קווליארי מאוד נזהר לא לייחס לעולם תכונות אטומיות, ואף לא לגופים המתמטיים עצמם. הוא לא טוען שצורות גיאומטריות באמת מורכבות מאוסף כל הקווים שלהן, אלא אומר שיש קשר בין קבוצות הקווים האלה ובין האובייקטים המתמטיים. קשר זה מאפשר לנו לפתור בעיות מתמטיות ולכן הוא יעיל. בעבודתו, קווליארי מדגים באופן נרחב את הקשר ואופן השימוש בו.[49]

---

[44] Paolo Mancosu, **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**. New York: Oxford University Press, 1996. pp. 48-49.

[48] Andersen, "Cavalieri's Method of Indivisibles". p. 300.

[49] אפשר להניח שקווליארי אכן היה אטומיסט, משום שראה את עצמו כתלמיד של גלילאו ומשום שקשה להניח שכלל לא האמין בתאוריה המתמטית שהוא מציג, במיוחד כאשר רוב הדימויים בהם הוא משתמש כדי להסביר את התיאוריה הם פיזיקלים. אולם בעיקר יש להתייחס לכך שלמרות זאת, הוא המשיך וניסה לנתק את התיאוריה מן המציאות ולטעון שאין להן קשר כלל וכלל.

4. ההתנגדות הישועית לאינפיניטיסימלים

4. 1. אינפינטסימלים במערכת הצנזורה הישועית

החברה הישועית הוקיעה את הדיון האינפיניטסימלי בנוגע ל- continuum (הרצף המתמטי) מראשית ימיה. עוד בשנת 1576, בימיו של קלאוויוס, פרסם בניטו פריירה (Benito Periera) ספר שמטרתו הייתה לבסס את מערכת ההשכלה הישועית, ועסק בשאלות פילוסופיות שהיה צורך לקבוע את עמדת המסדר לגביהן. הספר עסק בין היתר בהרכבה של הרצף המתמטי מנקודות נפרדות. הוא בתחילה הציג טיעונים בעד השיטה, ולאחר מכן הפריך את כולם, עד שנותר עם הקביעה האריסטוטלית הבלתי מעורערת, שהרצף המתמטי אינו מורכב מאינדיביזיבילים. עם השנים, השאלה הפילוסופית-מתמטית הזו צפה שוב ושוב, ובכל פעם פילוסופים ומתמטיקאים ישועיים הפריכו אותה ושללו אותה מכל וכל.[50]

בשנת 1601, הורה אבי המסדר על הקמת וועדה מצנזרת לחברה הישועית - Revisors General. וועדה בעלת חמישה חברים, שבכוחה לצנזר כל דוקטרינה, דעה ונושא הנלמדים בחברה הישועית. כשהוועדה קיבלה החלטה כלשהי, נשלחה הודעה בנושא לכל בתי הספר הישועיים בעולם. מהרגע שמורה ישועי קיבל את ההודעה בדבר החלטת הוועדה, היה עליו לזנוח כל דעה קודמת שהייתה לו בנושא, ולציית לקביעת המצנזרים. כל ספר שנכתב על ידי ישועי היה חייב גם הוא לעבור אישור של הוועדה, ומורים ומשכילים ישועיים מכל העולם יכלו להגיש לוועדה שאלות והצעות בנושאים שונים.[51]

הפעם הראשונה שהופנתה לוועדה המצנזרת הצעה בנוגע להרכבו של הcontinuum- הרצף (פיזיקלי או מתמטי), הייתה בשנת 1606, חמש שנים לאחר ייסודה. הצעה נשלחה מאחד מבתי הספר הישועיים בבלגיה, והיא טוענת ש"הרצף המתמטי מורכב ממספר סופי של אינדיביזיבילים". הוועדה קבעה שזוהי טעות פילוסופית. שנתיים לאחר מכן, נשלחה אותה ההצעה שנית, והפעם הוועדה הייתה נחרצת יותר בדבריה, וכתבה "על כולם להסכים שאסור ללמד זאת, משום שזה אינו אפשרי, ובנוסף שקרי ושגיאה פילוסופית, ומתנגד לאריסטו."[52]

ושוב, בשנת 1613, פסלה הוועדה את ההצעה ש"הרצף המתמטי מורכב מ'minims' פיזיקליים או אינדיביזיבילים מתמטיים". בשנת 1615 פסלה הוועדה את הדעה כי "הרצף המתמטי מורכב מאינדיביזיבילים", וכמה חודשים מאוחר יותר פסלה הוועדה את ההצעה כי "הרצף המתמטי מורכב ממספר סופי של אינדיביזיבילים." הפעם הוסיפה הוועדה כי היא אוסרת על לימוד השיטה הזו גם אם הטענה היא כי הרצף מורכב ממספר אין סופי של אינדיביזיבילים.[53]

---

[50] Alexander, **Infinitesimal.** pp. 121-122.

[51] Alexander, **Infinitesimal.** pp. 122-121. Rivka Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." pages 107-130 In **The Jesuits: Cultures, Science and the Arts 1540-1773** ed. Jhon O'Malley. Toronto: University of Toronto Press, 1999. p. 116.

[52] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Alexander, **Infinitesimal.** p. 123.

[53] Alexander, **Infinitesimal.** pp. 123-125.

בשנת 1651 פורסמה על ידי הוועדה המצנזרת רשימה של תזות אסורות במסדר הישועי: שישים וחמש תזות פילוסופיות ועשרים וחמש תזות תיאולוגיות. ארבע מתוך התזות האסורות עסקו באינפיניטיסימלים ובהרכב של הרצף המתמטי והפיזיקלי.

25. הרצף [והעוצמה של תכונות] מורכבים מאינדיביזיבילים בודדים.

26. ניתנות נקודות [מנופחות- inflatable] אשר מהן מורכב הרצף.

30. אינסוף בגודל ובריבוי יכול להיות מוגבל בין שתי יחידות או בין שתי נקודות.

31. [יחידות] ריק קטנות שלובות ברצף, מעטות או רבות, קטנות או גדולות, תלוי בנדירות או בצפיפות שלו.

מן הרגע ההוא ואילך, אף תיאוריה המכילה אחת מארבע הטענות הללו לא הייתה קבילה בחברה הישועית, ואסור היה להחזיק בה או לעסוק בה.[54]

עם השנים, ההתנגדות לאינדיביזיבילים הופנמה בחברה המתמטית הישועית. אם כי היו מתמטיקאים ופיזיקאים ישועים שתמכו ברעיונות אינפיניטסימליים, עבודותיהם צונזרו, ולעיתים כותביהם נענשו על עבודתם. עם ההפנמה של ההתנגדות לאינפיניטסימליים, החלו מתמטיקאים ישועים לנסח את ההתנגדות לאינפיניטסימליים מבחינה מתמטית. בצורה זו, הצליחו המתמטיקאים הישועים לקחת חלק בשיח המתמטי העדכני והחדשני באינפיניטסימליים ובו בזמן להישאר נאמנים לעקרונות הפילוסופיים של המסדר.

לעבודתו של קווליארי על האינפיניטסימליים התנגדו מספר מתמטיקאים ישועים. הבולט שבהם ככל הנראה היה פאול גולדין (Paul Guldin), מתמטיקאי ישועי בן זמנו של קווליארי שניהל פולמוס ארוך שנים עם תורתו.

4. 2. פאול גולדין

פאול גולדין נולד בשנת 1577 בשוויץ תחת השם חבקוק גולדין, להורים פרוטסטנטים ממוצא יהודי. כנער למד צורפות ועסק במקצוע בערים שונות בגרמניה. בסוף שנות ה- 90 של המאה ה- 16 החל לחוש ספקות לגבי דתו, ולבסוף כשהיה בן 20 נטש את אמונתו הפרוטסטנטית והמיר את דתו לקתוליות. עם המרת דתו, שינה גולדין את שמו מחבקוק, נביא יהודי, לפאול, שאותו ראה כמבשר הנצרות לכופרים. עם המרת דתו גולדין הצטרף למסדר הישועי. לאחר מספר שנים הפך למלומד ישועי ולאחר מכן לכומר (כוהן) ישועי. בשנת 1609 הועבר גולדין לרומא, ללמוד מתמטיקה בקולגיו רומנו, תחת כריסטופר קלאוויוס (במסגרת התכנית לתלמידים מצטיינים במתמטיקה).[55]

[54] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Alexander, **Infinitesimal.** pp. 147-148.
[55] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, **Guldin biography**. May 2010. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Guldin.html

למרות שקלאוויוס לא נחשב למתמטיקאי יוצא דופן, הוא נחשב למורה מצוין, ורבים מתלמידיו, כמו גם גולדין, הושפעו מעבודתו ומדעותיו. בדומה למורו דגל גולדין במה שהוא ראה כמתמטיקה קלאסית, שהיא מתמטיקה אוקלידית וגיאומטרית בעיקרה. אמנם, בניגוד לקלאוויוס, גולדין הרחיב את המתמטיקה הטהורה לשלושה תחומים עיקריים (במקום לשניים), והוסיף על האריתמטיקה והגיאומטריה המסורתיים גם את האלגברה החדשנית, זאת בעקבות התרשמותו העמוקה מעבודתו של ויאטה (Viete - מתמטיקאי צרפתי שפיתח רבות את האלגברה, על שמו נקראות נוסחאות ויאטה). אחת ההשפעות המשמעותיות ביותר של קלאוויוס על גולדין היא ההכרה במקומה החדש של המתמטיקה בהיררכית הידע - כמדע שבין הפיזיקה למטפיזיקה, שעוסק בגדלים מופשטים ממהות חומרית.[56]

לאחר שסיים את לימודיו בקולגיו רומנו, גולדין החל ללמד שם, ובשנת 1617 עבר ללמד בגראץ שבאוסטריה (Graz). ב- 1618 פרסם גולדין את עבודתו הראשונה, שעסקה בהגנת לוח השנה הגרגוריאני שקלאוויוס היה אחד מהוגיו. בשנת 1622 פרסם גולדין עבודה ראשונית על מרכזי כובד. שנה לאחר מכן הוא נשלח לוינה, שם מונה למשרת פרופסור למתמטיקה. בשנת 1629 נשלח על ידי המסדר הישועי ללמד בגימנסיה הישועית בזגן (Sagan), אך אחרי זמן מועט חזר ללמד בוינה, שם נשאר עד 1637, אז חזר לגראץ.

בין השנים 1635 - 1641 פרסם גולדין את ארבעת הכרכים של עבודתו הגדולה העוסקות במרכזי כובד- **Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae** (צנטרובריקה, או, אודות מרכזי הכובד של שלוש כמויות רציפות ספציפיות). שלושת הכרכים הראשונים של העבודה עסקו בתורתו של גולדין, והכרך הרביעי עסק בהתפלמסות עם מתמטיקאים שונים בני תקופתו, קוואליארי ביניהם.

בשנת 1643, שנתיים בלבד לאחר פרסום הכרך האחרון של ספרו, גולדין מת. למרות שמפעלו כנגד האינפיניטסימליים לבסוף נכשל, והם כיום חלק אינטגרלי מהמתמטיקה, גם לגולדין יש השפעה היסטורית ומתמטית. על שמו נקרא משפט פאפוס-גולדין, משפט בחשבון אינפיניטסימלי[57] העוסק בחישוב נפח גוף סיבוב, והוא מופיע כדמות בדיון בספרו של פאולו קסאטי (Paolo Casati), ספר אסטרונומי המתנהל כדיון בין אסטרונומים שונים, גולדין וגלילאו ביניהם.[58]

4. 3. המתמטיקה של גולדין- חידוש וצנזורה בתוך עולם המתמטיקה הישועי

על הנייר, גולדין הוא מתמטיקאי ישועי שמרני, כרוב בני דורו. המתמטיקה שלו מכילה רעיונות גיאומטריים ויישומים פיזיקליים שלהם, כמו קלאוויוס ורבים אחרים לפניו. המתמטיקה של גולדין שימשה את המסדר הישועי בפולמוסים המתמטיים כנגד תפיסות חדשניות שלא התקבלו על חברי המסדר, האינדיביזיבילים של קוואליארי ביניהם. אולם בחינה קפדנית של

[56] O'Connor and Robertson, **Guldin biography.** Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 119.
[57] למרבה האירוניה, המשפט היום נחשב לחלק מהמתמטיקה האינפיניטסימלית אליה גולדין התנגד. עניין זה יובהר עם המשך העבודה, לאחר שאבחן את טיבה האמתי של התיאוריה של גולדין.
[58] O'Connor and Robertson, **Guldin biography**.

עבודתו חושפת תמונה יותר מורכבת: המתמטיקה של גולדין היא שילוב מעניין של חידוש לצד צנזורה ומסורת מתמטית ישועית מורכבת שירש ממורו, שיחד יצרו תערובת מוזרה של מתמטיקה, פילוסופיה ופיזיקה. הקונפליקט של המתמטיקאים הישועים - הרצון להישאר בתוך השיח המתמטי החדשני והמתפתח לצד הצורך לציית לחוקי המסדר ולאמונתם הישועית - מתבטא היטב בתפיסה המתמטית המורכבת של גולדין. התפיסה המתמטית שלו היא לעיתים סדורה ולעיתים פרגמטית, לפעמים תואמת תפיסות ישועיות ולפעמים תפיסות חדשניות בנות זמנו.

גולדין, כמו קלאוויוס לפניו, דגל במתמטיזציה של מדעי הטבע, אך הצידוק לכך היה מעט שונה משל מורו. לטענתו, כל מדע מתמטי מכיל בתוכו חלק תיאורטי וחלק פרקטי. החלק הפרקטי הוא החלק הפיזיקלי של התחום, ובמסגרתו נערך המחקר המתמטי. שינוי עיקרי שהתפיסה הזו מובילה אליו הוא שמתמטיקאים קובעים את התחומים בהם הם עוסקים, וכך גם את האובייקטים שלהם הם משייכים תכונות מתמטיות. זאת בניגוד לתפיסות יותר שמרניות של מתמטיקה המכפיפות אותה לפילוסופיה של הטבע, והפילוסופיה היא זו שקובעת את הגבולות של העיסוק המתמטי. באופן הזה, גולדין יכול לקבוע שמרכזי כובד הם לא רק אספקט פיזיקלי של גופים פיזיים, אלא הם אובייקטים מתמטיים שבעזרת הכלים המיוחדים של המתמטיקאים הופכים למופשטים מחומר. בעצם, למתמטיקה יש יכולת פלאית כלשהי להפשיט חומר מצורתו הפיזית לצורתו הרעיונית, הטהורה. גולדין גם מכניס לתוך תחומי הידע המתמטיים את האלגברה, שאינה אחד מהתחומים המתמטיים המסורתיים. הוא טוען שהאלגברה היא תחום מתמטי מופלא, שמצליח "לטפל במספרים כמו קווים, מישורים וגופים, ולהפוך קווים למספרים ומספרים לקווים באיזו אומנות מופלאה".[59] בעבודתו המתמטית ניכרת השפעה של רעיונות אלגבריים, למרות שעל פניו המתמטיקה שהוא עוסק בה היא גיאומטרית קלאסית.[60] יש לשים לב לכך שבשני המקרים שבו גולדין חורג מדעותיו של קלאוויוס ושל שאר המתמטיקאים לישועים הוא העניק למתמטיקה יכולת בלתי מוסברת להפריד את המהות החומרית ואת המהות הרעיונית של אובייקטים פיזיקליים. גולדין לא הסביר מהי היכולת הזו או מהי פעולתם של הכלים המתמטיים המשמשים להפשטה של מהות רעיונית מהאובייקט החומרי. הוא מציג את המתמטיקה כמדע מופלא, שיכולתו לתאר אובייקטים חומריים נובעת מהיכולת הפלאית הזו שלו.

חלק עיקרי מספרו של גולדין מוקדש להוכחה מחודשת של תיאוריות ותוצאות מתמטיות עתיקות, שהוכחו בשיטות שלא סיפקו את גולדין ומתמטיקאים קלאסיים נוספים, כגון הוכחות אינפיניטסימליות או הוכחות על דרך השלילה. תיאורמות מתמטיות רבות מוכחות על דרך השלילה - מניחים את ההנחה ההפוכה לטענה שיש להוכיח ומגיעים לסתירה. הוכחות אלה נחשבות "חלשות" יותר מבחינה אונטולוגית - משום שבסופו של דבר, הן לא מוכיחות את אמיתות הטענה. בפרק הרביעי של הספר שלו, נוסף על ההתנגדות לתיאוריות מתמטיות שונות, גולדין מוכיח על דרך החיוב הוכחות עתיקות רבות המסתמכות על שיטות אלה, שבעיניו דרשו

[59] Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 119.
[60] Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 123.

הוכחה נוספת, הפעם על דרך החיוב. הוא משתמש בתיאוריה שלו לגבי מרכזי כובד ובכלל המתמטי שלו, כדי להוכיח על דרך החיוב הוכחות עתיקות רבות, ברובן ארכימדיות.

החלק המעניין ביותר בתפיסה הייחודית של המתמטיקה והפיזיקה של גולדין מתבטא בספרו **צנטרובריקה**, העוסק במרכזי כובד של צורות גיאומטריות שונות, ובמרכזי כובד של גופים שמימיים. בסוף הספר גולדין מגיע למסקנה שמרכז הכובד של כדור הארץ משתנה כתוצאה משינויים קטנים על פני כדור הארץ, והשינוי במרכז הכובד גורם לתנועה של כדור הארץ. התוצאות של העבודה המתמטית שגולדין מציג בספר הן - כדור הארץ יכול לזוז ממרכז היקום.

> הדגמתי, כפי שאני מאמין, שמרכז הכובד של כדור הארץ יכול לזוז, ומכך נובע, כדור הארץ יכול לזוז. זה מה שהשיג גבריאל וסקז (Gabriel Vasquez) המלומד... ומה שניתן להראות באופן יותר ברור על ידי הוכחה מתמטית.[61]

אמנם, ככל הנראה קרוב יותר לפרסום הספר, גולדין שינה את דעתו בדבר תזוזת כדור הארץ, והוסיף ביאור המכיל ביקורת עצמית על שגיאתו. ככל הנראה גולדין שינה את דעתו בהשפעת פרסום הספר **Philosophia Magnetica** של ניקולו קבאו (Niccolo Cabeo), בשנת 1629. קבאו, גם הוא מתמטיקאי ופילוסוף ישועי, העביר ביקורת חריפה על הטוענים כי כדור הארץ זז ממקומו. קבאו טען שהתוצאות השגויות נבעו משום שהמתמטיקאים שניגשו אל הבעיה התייחסו לכדור הארץ כאל כל גוף פיזיקלי אחר. לטענתו, הבעיה בדבר תזוזת כדור הארץ אינה בעיה מתמטית, משום שכדור הארץ הוא לא גוף מתמטי. לכן אין זו שאלה שהמתמטיקאים יכולים לפתור. בניגוד לגולדין, הוא החזיק בטענה המסורתית כי יש פער בין טיעונים מתמטיים ופיזיקליים.[62]

בביאור שהוסיף גולדין לספרו טען שהנחת הבסיס הקודמת שלו לכתיבת הספר, שכל תנועה על גבי כדור הארץ יכולה לשנות את מרכז הכובד שלו, שגויה. באופן ספציפי, הוא שלל את האפשרות לתנועתו של כדור הארץ כתוצאה ממה שעכשיו קרא לו "התנודות" של מרכז הכובד שלו. ככל הנראה, הציע, התנודות של מרכז הכובד אינן גורמות לתנועה פיזית של כדור הארץ. הביאור מסתיים עם הפרדה ייחודית בין פיזיקה ומתמטיקה שגולדין מוסיף: הוא מפריד בין המתמטיקאים העוסקים בתנודות של כדור הארץ ובחישובים מתמטיים עדינים, ובין אנשים אחרים העוסקים בתזוזות של כדור הארץ.

> המודאגים לגבי תנודתו של כדור הארץ - נוחו בשלום. ותנו למתמטיקאים האלה, שבכל העיתים מפשיטים [מפרידים] מדברים פיזיקליים רבים את המחשבה ואת האובייקט עצמו, להישאר בלתי מוטרדים בתנודות שלהם, כשהם קושרים עצמם לחישובים דייקניים ולנקודות הגיאומטריות הקטנות ביותר, שמא יעופו ברוחות.[63]

---

[61] Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 124.
[62] Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 124.
[63] Feldhay, "The Cultural Field of Jesuit Science." p. 125.

המשפט המסכם של ביאור זה, ועצם העובדה שגולדין פרסם ספר עם תוצאות מתמטיות שהוא כביכול הכיר בהן כשגויות, פותח לדעתי שתי אפשרויות פרשניות לגבי מניעיו של גולדין לפרסום הספר ה"שגוי". הראשונה, היא שגולדין סבר שאכן כדור הארץ אינו מקובע במקומו, והוסיף את הביאור רק כדי לציית לדעות המסדר הישועי. אפשרות זאת אינה מופרכת לחלוטין, משום שגולדין היה חבר קרוב של קפלר (Kepler), אסטרונום קופרניקאי ידוע, התכתב אתו ועזר לו בעבודותיו. הוא היה חשוף מאוד לרעיונות קופרניקאים, ואף אם לא האמין בתורה ההליוצנטרית יכול להיות שהאמין שכדור הארץ יכול לנוע ממקומו. השנייה, שיכולה לעמוד בפני עצמה גם אם לא נקבל את הסברה הראשונה, או להשתלב איתה, היא שגולדין היה נאמן לתוצאות המתמטיות שהשיג. לכן גם כאשר דחה את התוצאות המידיות של התיאוריה שלו בדבר תנועתו של כדור הארץ גולדין לא מוטט את התיאוריה שלו אלא אמר שהתנועה של מרכז הכובד אינה משפיעה על תנועתו של כדור הארץ. בבחירה הזו גולדין אימץ לעצמו זהות מתמטית שהיא ייחודית במסדר הישועי, ודומה יותר לזהות של חוקרים שאינם בני המסדר. הוא ייצר לעצמו מערכת משולבת של אמונה מוחלטת בתוצאות המתמטיות של עבודתו, לצד אמונה קתולית מוחלטת.

זהות זו גרמה לגולדין לשלב בתורתו באופן מודע ובלתי מודע רעיונות שמרניים וחדשניים זה לצד זה. מצד אחד יש בעבודתו צנזור עצמי של רעיונות שלא תואמים את התפיסה השמרנית. מצד שני הצורך לצנזר את עבודתו הוביל את גולדין לפתח מורכבות פילוסופית וזהותית ייחודית, המוכללת אל תוך התיאוריה המתמטית שלו.

5. הדיאלוג בין קווליארי וגולדין כמקרה בוחן להתנגדות הישועית לאינפיניטסימליים

5. 1. הדיאלוג

ההתנגדות של גולדין וקווליארי זה לתיאוריות של זה פרוסות על פני עשרות אם לא מאות עמודים, ואף המשיכה לאחר מותם, בידי תלמידיהם. ראשית הדיון בפרסום הספר **Centrobaryca** של גולדין. כשקווליארי פרסם את ספרו השני, **Exercitationes** הוא הגיב לטענותיו של גולדין, ואף הוסיף ביקורת על התיאוריה המתמטית של גולדין. הדיון המשיך בידי יורשיהם: האח סטפנו דלי אנגלי (Stefano degeli Angeli), נזיר ג'סואטי ותלמידו של קווליארי שצידד בשיטתו, ומולו מתמטיקאים ישועים שהמשיכו את המסורת של גולדין ותקפו את השיטה האינפיניטסימלית של קווליארי, ביניהם בטיני (Bettini) וטאקוט (Tacquet). אתייחס לדיאלוג שהתרחש בין קווליארי וגולדין, משום שהטענות המהותיות כנגד השיטה מופיעות בו, ומשום שהוא זה שביסס את היחס הישועי לשיטה של קווליארי. דרך ניתוח של המאפיינים אליהם התנגד כל אחד מהמתמטיקאים בתורתו של האחר אנסה למצוא את הבסיס הרעיוני להתנגדות, ולקשור את הדיאלוג לדיון הישועי הכולל לגבי האינפיניטסימלים.

גולדין פתח את ההתנגדות שלו לקווליארי בהתנגדות שאינה מתמטית כלל - הוא טען שקווליארי העתיק את הרעיונות האינפיניטסימליים שלו משני חוקרים אחרים בני זמנו שעסקו אף הם בחשבון אינפיניטסימלי - קפלר וסובר (Sover). רק לאחר מכן, הוא שטח את התנגדותו המתמטית השיטתית כנגד מאפיינים מתמטיים במתמטיקה של קווליארי.[64]

כנימוק ראשוני, גולדין ציין את חוסר היעילות של השיטה. המתמטיקה שקווליארי מציג היא כללית- העקרונות שהוא מציג הם אבסולוטיים ולא פרטיים. כלומר, הם תקפים לכל מקרה מתמטי באשר הוא ואינם תלויים בפרטי הבעיה הספציפית. כדי שהם יהיו כאלה, החוקים והעקרונות שקווליארי מציג הם אוניברסליים ולא ספציפיים (זו אולי אחת מהסיבות שקווליארי מפרט כל כך ומציג דוגמאות רבות ליישומים לתיאוריה שלו). החוקים שקווליארי מציג הם לא ישימים, טען גולדין: הם לא מאפשרים למתמטיקאי לפתור בעיה בעזרתם. למשל, בבעיה מסוימת הדורשת למצוא את המשיק לצורה מסוימת, התיאוריה של קווליארי לא מאפשרת למצוא את משוואתו של המשיק. כל שתוכל תורתו לעשות הוא להבטיח לי את קיומו של המשיק. זה לא מספיק כדי לפתור בעיות גיאומטריות. יש בהתנגדות הזאת ממד מעניין אם נבחן אותה ממבט היסטורי: המתמטיקה הקלאסית, שגולדין הוא דוברה, היא מתמטיקה המתייחסת למקרים פרטיים. טענה אוקלידית לדוגמה, היא טענה המתייחסת למקרה מתמטי יותר ספציפי. המתמטיקה והפיזיקה של המהפכה המדעית הן אוניברסליות. הן מחפשות כלים כלליים שאינם מעוצבים על ידי המקרה הפרטי אלא על ידי טיבם האובייקטיבי של מושאיהם. כזו היא המתמטיקה של קווליארי.[65]

[64] Alexander, **Infinitesimal.** p. 152. Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** p. 51.
[65] Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** pp. 52-53.

על ההתנגדויות האלה גולדין מוסיף שתי התנגדויות שנובעות מהיחס לאינסוף ומתקשרות לדיון הישועי במתמטיקה אינפיניטסימלית. הראשונה, היא התנגדות לגבי אופיו של הרצף המתמטי. גולדין טוען, שאמנם התנועה של הרגולה יכולה לשמש לתיאור צורות, אבל הרצף המתמטי לא יכול להיות מורכב מאינסוף אינדיביזיבילים, משום שסכומם של אינסוף איברים שסכומם אפס יהיה אפס.

> לדעתי, אף אדם העוסק בגיאומטריה לא יסכים שהשטח הוא, או יכול להיקרא בשפה גיאומטרית, "כל הקווים של צורה מסוימת". למעשה, מספר קווים לעולם לא יכולים להיקרא שטח, משום שגודלם של קווים, לא משנה כמה רבים יהיו לא יוכל להרכיב אפילו את השטח הקטן ביותר.[66]

גולדין אף מביע עמדה נחרצת יותר לגבי ההיתכנות והקיום של האינדיביזיבילים של קווליארי, וטוען כי

> דברים שאינם קיימים, ואינם יכולים להתקיים, אינם ניתנים להשוואה.[67]

גולדין מאשים את קווליארי שהשיטה שלו מושתתת על הרכבה אטומיסטית של הרצף המתמטי. הנימוק שהוא מציג כנגדו הוא נימוק אריסטוטלי קלאסי ביחס להרכבתו של הרצף, והוא מזכיר נימוקים רבים שהמצנזרים הישועיים והכותבים הישועיים סיפקו במרוצת השנים להתנגדות לאינפיניטסימליים.

תשובתו של קווליארי לטענה הזו, היא שהמתמטיקה שלו לא מחייבת אותו לעמדה מסוימת בנוגע להרכבת הרצף המתמטי.

> למעשה, עבור אלה הטוענים שהרצף מורכב מאינדיביזיבילים, התיאור שמספקים האינדיביזיבילים יהיה התיאור של השטח. מן הצד השני, אלה, שנוסף לאינדיביזיבילים, מצרפים לרצף דבר [מהות] אחר, יצטרכו להגיד שמשהו נוסף מתואר דרך התנועה [של הרגולה].[68]

תשובתו של קווליארי מנסה לנתק את העקרונות האינפיניטסימליים של המתמטיקה שלו מהמהות המטפיזית של הדיון על ה- **continuum**, ובעצם מנסה לאפשר למתמטיקה שלו להתקיים מחוץ לדיון זה. קווליארי לא בוחר או מצדד בעמדה מסוימת בנוגע להרכבתו של הרצף. המתמטיקה שלו בעיניו, תקפה ללא קשר למהות הממשית של האינדיביזיבילים או של השטח המתואר על ידם. כל קורא יכול לבחור לפרש אותה לפי אמונתו וראות עיניו- המתמטיקה שלו תהיה תקפה כך או כך.

בספרו Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World, מוסיף עמיר אלכסנדר כי ההתנגדות של גולדין נובעת לא רק מתפיסת הרצף והאינסוף

66 Alexander, **Infinitesimal.** p. 153. Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** p. 54.
67 Alexander, **Infinitesimal.** p. 154.
68 Alexander, **Infinitesimal.** p. 155. Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** p. 54.

האריסטוטלית של הישועים, אלא גם מהתנגדות למבנה המתמטי הדה-קונסטרוקטיבי של המתמטיקה האינפיניטסימלית. כפי שעמיר מציין, הגיאומטריה האוקלידית, שעמדה בבסיס החשיבה המתמטית הישועית בנויה על הרכבה של גופים. כל מקרה מתמטי מתחיל מהגדרה מדויקת של פרטי הבעיה, שנבנים שכבה על גבי שכבה. לעומת זאת, הגיאומטריה האינדיביזיבילית בנויה על פירוק של מבנים מתמטיים- הבעיה מתחילה ממקרה מתמטי מורכב, שעובר פירוק והפשטה לפרטים אינדיביזיבילים. הקונפליקט שאלכסנדר מציג בין שתי השיטות המתמטיות הוא קונפליקט בין שתי תפיסות שונות של הרכבת העולם המתמטי. הוא גם מדגיש את חשיבותו של הקונפילקט בייצוגו התיאולוגי. שכן אם המתמטיקה הישועית מייצגת את העולם הנוצרי ההירכי, הרי שבניית מתמטיקה שאינה הירכית הופכת לכפירה בעקרונות הקתוליים שמיוצגים במתמטיקה הישועית.[69]

גולדין מציג התנגדות שנייה הנשענת על היחס האריסטוטלי לאינסוף ועל תפיסה מתמטית אוקלידית מסורתית. התנגדות זו היא התנגדות פחות מוכרת בדיון הישועי לגבי האינפיניטסימליים. גולדין טען, כי כל הקווים של צורה מסוימת הם לא גודל (Magnitude) משום שהם קבוצה אינסופית. על אינסופיים לא ניתן להכיל יחסים מתמטיים[70], ולכן התיאוריה של קווליארי לא תקפה.

> כל הקווים... של שתי צורות הם אינסופיים; אבל לאינסוף אין פרופורציה או יחס לאינסוף אחר.[71]

הטיעון הזה הוא תקיפה על יסוד בסיסי בשיטה של קווליארי, המתבססת על עקרונות מתמטיים אריסטוטליים וקלאסיים.

כדי להתמודד עם ההתקפה הזו על השיטה שלו, קווליארי מחלק את האינסוף לשני סוגים שונים: האחד, אינסוף אבסולוטי, והשני אינסוף רלטיבי.[72] לטענתו, אינסוף אבסולוטי הוא אינסוף "בכל מקום", בעוד אינסוף רלטיבי הוא אינסופי רק ביחס לגדלים אחרים, ולכן אינסוף אבסולוטי אינו ניתן להשוואה לגדלים אחרים, ואינסוף רלטיבי כן. כך הוא אמר

> ובכן, כל הקווים והמישורים שהוזכרו הם אינסופיים ביחס למשהו; אבל למרות שהם אינסופיים ביחס למספר, הם לא כאלה ביחס לגודל, משום שהקווים והמישורים האינדיבידואלים הם סופיים והקבוצות שלהם חסומות בכל מקום על ידי הצדדים. מהסיבה הזאת האינטלקט יזהה שאפשר לבצע עליהם חיבור וחיסור, לא משנה מה יהיה

---

69 Alexander, **Infinitesimal.** p. 152.

70 זאת התייחסות לאקסיומה של ארכימדס, לגבי יחסים בין גדלים, הטוענת שבהנתן שני גדלים בעלי יחס אחד לשני, ניתן למצוא מכפלה של אחד שתהיה גדולה מן השני. ארכימדס מבסס על האקסיומה הזאת את השיטה האינפיניטסימלית שלו (שיטת המיצוי), אבל ארכימדס מניח שלכל קו יש מספר סופי של נקודות המרכיבות אותו, ולכן האקסיומה סותרת את השיטה של קווליארי. גולדין מתייחס בטענה הזו גם להגדרות האוקלידיות לגודל וליחסים בין גדלים, שמופיעות בתיאורמות הראשונות בספר החמישי של "היסודות" של אוקלידס.

71 Alexander, **Infinitesimal.** p. 155. Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** pp. 54- 55.

72 ההבחנה של קווליארי אינה בדיוק דומה להבחנה האריסטוטלית או להבחנה המתמטית המקובלת היום, בין אינסוף אקטואלי ואינסוף פוטנציאלי. לפי קווליארי, אינסוף אבסולוטי הוא אינסוף כדוגמת המספרים הטבעיים, בעוד האינסוף הרלטיבי יהיה אינסוף כדוגמת כל המספרים בין 0-1. משום שהאינסוף האבסולוטי אינו חסום הוא אינו ניתן להשוואה לגדלים אחרים, אך לאינסוף הרלטיבי יש "חסמים" עליונים ותחתונים ולכן הוא ניתן להשוואה לגדלים אחרים.

מספר האינדיביזיבילים שנוכל לדמיין שנחבר או נחסר להם. לכן הקבוצות האלה ניתנות להשוואה.[73]

ההבחנה שקווליארי מבצע אינה ברורה במיוחד, והוא גם לא מגדיר את שני סוגי האינסוף שלו בצורה נהירה. ההגדרה היחידה שהוא מספק היא "אינסוף בכל מקום" אל מול "אינסוף יחסי". למרות כל זאת, זו הבחנה יעילה להתנגדות לביקורת של גולדין, משום שהוא מציג אינסוף שאינו מציית לחוקים שגולדין מתייחס אליהם, וכך הוא מתקף את התיאוריה שלו.

חוץ מתשובות להתנגדות של גולדין למתמטיקה שלו, קווליארי מוסיף התנגדות משלו לספרו של גולדין. התנגדות של קווליארי יכולה להאיר על נקודות שוני מהותיות בין התפיסות המתמטיות של השניים, וגם להבליט את הנקודות החסרות בתיאוריה של גולדין.

קווליארי מתנגד העקרונית למתמטיקה שגולדין מציג. גולדין, טען קווליארי, לא הוכיח את עיקרון היסוד של התיאוריה המתמטית שלו, אלא רק באופן מסתבר (הוא הניח שהוא נכון כי הוא עזר לו להשיג תוצאות נכונות). חלקים נוספים בתיאוריה של גולדין הוכחו רק על דרך השלילה או דרך הפרכה - ad absurdum. קווליארי התנגד לזה ולזה, וטען שאלה לא הוכחות מספיקות על מנת לתקף את התיאוריה. לטענתו, הכלל שעליו מבסס גולדין את התיאוריה שלו לא תקף, משום שלא הוכח ולכן כל ההוכחות שהוא מבסס עליו אינן תקפות גם הן.

> יותר מכך, אני יודע שאת כל הדברים שהוזכרו ניתן להעמיד על [reduce] סגנון ארכימדי. דבר זה, שהוצג לגולדין על ידי האינדיביזיבילים, היה לפחות יכול לשרת אותו, אפילו אם הוא דחה אותם, ובפרט על ידי החלפת ההוכחה על ידי אינדיביזיבילים להוכחה ארכימדית, כפי שניתן לעשות בכל ההוכחות שמושגות על ידי אינדיביזיבילים והוא, אשר בכל מקום משבח את מצוינותה של ההוכחה הישירה [על דרך החיוב], לא היה צריך להתעלם מהם [האינדיביזיבילים], מאחר שבמקרה זה ההוכחה הישירה יכולה להתקבל רק על ידי שימוש באינדיביזיבילים. לכן לשווא הוא שיחזר, בספרו הרביעי, טענות אוקלידיות וארכימדיות שהוכחו על דרך השלילה, כדי שיוכלו להשיג את המצוינות המדוברת של הוכחות ישירות, אלא אם יוכיח את החוק הכללי שלו [אשר בעזרתו הוכיח את אותן הטענות] בצורה ישירה גם כן.[74]

קווליארי מציג הוכחה אינפיניטסימלית לכלל היסוד של גולדין, וכך מראה שקבלה של החשבון האינפיניטסימלי יכולה לקדם את המתמטיקה ולתקף אף את התיאוריה של מתנגדו. אם ילקח בחשבון שגולדין התנגד להוכחות על דרך השלילה כי הן נחותות ומשייכות לטבע נחות יותר של המתמטיקה[75] ולעומת זאת סבר כי הוכחות על דרך החיוב הן הוכחות מתמטיות אמתיות, על ידי הכללת האינדיביזיבילים שלו בטיעון על דרך הוכחה ישירה לשיטתו של גולדין, קווליארי יכול להראות את החשיבות של השיטה האינפיניטסימלית. הוא גם חזר ופירט:

---

[73] Alexander, **Infinitesimal.** p. 156. Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** pp. 54-55.

[74] Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** pp. 61-62.

[75] גם לקווליארי יש העדפה אונטולוגית להוכחות על דרך החיוב, ולמעשה בכל ששת הכרכים של ספרו הראשון השתמש בהוכחה אחת בלבד על דרך השלילה, אשר גם אותה הוכיח בספרו השני.

יכול להיות שהוא [גולדין] כל כך שנא את האינדיביזיבילים, מהם הוא היה יכול להשיג רווח גדול, ולהשיג את ההוכחה הישירה ששיבח כל כך, אבל הוא העדיף לעקוב אחרי הסגנון הארכימדי, אותו הוא ביקר על השימוש בדרך השלילה.[76]

הביקורת של קווליארי במקרה הזה היא על כך שגולדין אינו נאמן לעבודתו המתמטית, ולעקרונות המתמטיים שהוא מציג, ומוכן לזנוח תוצאות מתמטיות משמעותיות בגלל הנחות פילוסופיות. מכאן עולה שוני מהותי בין שתי התפיסות. לקווליארי יש דרישה שונה משל גולדין אל היחס בין פילוסופיה למתמטיקה - המתמטיקה לא אמורה להיות מושפעת מהנחות פילוסופיות או פיזיקליות. הנאמנות הראשונה של המתמטיקאי צריכה להיות לתוצאות ולמטרות המתמטיות, ולא לעקרונות פילוסופיים. גולדין, כמתמטיקאי ישועי, נותר כבול להנחות הפילוסופיות כבסיס לעולם המתמטי שהוא מרכיב.

משפט סתום כביכול שגולדין כותב במהלך ההתנגדות שלו לקווליארי מאפשר לנו הצצה יותר ישירה אל דעותיו האמתית של גולדין. כמעין פליטת פה, גולדין כותב באופן לא ברור, כי:

אינני חושב שהשיטה [האינדיביזיבילית] צריכה להידחות מסיבות שיש להדחיק על ידי שתיקה שלעולם אינה מתאימה.[77]

כמתמטיקאי ישועי, ההתנגדות של גולדין למתמטיקה האינפיניטסימלית אמורה להגיע מנימוקים פילוסופיים ותיאולוגיים. אך כמתמטיקאי של העת החדשה, הוא חש באי נחת להתבסס על נימוקים שכאלה, משום שאלה איבדו מתוקפם בזמן זה. לכן גולדין מתייחס אליהם כ-"סיבות שיש להדחיק אותן". אולם מדבריו כאן, עולה שגולדין כלל לא מזדהה עם החשיבה המתמטית הישועית, המעוגנת בפילוסופיה. שכן הוא כותב שלדעתו אין לדחות את השיטה האינדיביזיבילית על רקע הסיבות הפילוסופיות. סוף המשפט נותר סתום. יכול להיות שגולדין מבקש שהדיאלוג יחדל להיות מונע ממניעים נסתרים שכאלה, אבל גולדין לא מציין את הסיבות הנעלמות האלה שנית, ואין דרך לגלות מה הייתה כוונתו האמתית.

מהדיון בין קווליארי וגולדין עולות שתי נקודות מרכזיות. הראשונה היא ההבחנה בין שני סוגים שונים של מתמטיקה המתקיימים זה לצד זה, ונאבקים על מקומם בהיררכית הידע בראשית המאה ה- 17: מתמטיקה קלאסית הנשענת על עקרונות אריסטוטליים, וכנגדה מתמטיקה חדשנית המתנתקת מנימוקים פילוסופיים ומתפקדת בתוך מערכת הנחות מתמטית סגורה. במקרה זה, המתמטיקה הישועית היא שונה במקצת מהמתמטיקה הקלאסית האריסטוטלית, משום שהיא גם בעלת מאפיינים תיאולוגיים, שמציבים את הדיון האינפיניטסימלי לא רק בלב מאבק מתמטי, אלא גם בליבו של מאבק תיאולוגי ופיזיקלי לגבי המבנה החומרי של העולם. הנקודה השנייה, חשובה לא פחות, היא הבנת המקום הבעייתי והנזיל של מתמטיקאים ישועיים בתוך המאבק בין השיטות המתמטיות, שהפך למאבק על זהותו של המדע בעת החדשה.

[76] Mancosu, **Philosophy of Mathematics.** p. 62.

[77] התרגום מאנגלית שלי, המקור מופיע אצל Alexander, **Infinitesimal.** p. 154.

5. 2. אינקומנסורביליות במאבק הישועי באינפיניטסימליים

כדי לשפוך אור על הדיון בין גולדין וקוואליארי וההתפתחות של המתמטיקה האינפיניטסימלית, ניתן להיעזר בתיאוריה של מריו ביאג'ולי (Mario Biagioli) לגבי אינקומנסורביליות (היות-בלתי-ניתן-להשוואה ,Incommensurability) ומהפכות מדעיות.[78] ביאג'ולי משתמש בכלים היסטוריים ואנתרופולוגיים כדי לאפיין את התפתחותן של תיאוריות מדעיות ואת התהליך של קבלת תיאוריות מדעיות חדשות. דרך הצבעה על תכונות שונות של דיאלוגים בין תיאוריות אינקומנסורביליות ושל התפתחות של תיאוריות כאלה, ביאג'ולי מסביר את המאבק בין גלילאו והאריסטוטלים. מאבק זה, שהתרחש עוד בזמנם של גולדין וקוואליארי מכיל נקודות דמיון רבות לפולמוס בין שני המתמטיקאים.

אינקומנסורביליות, כותב ביאג'ולי, הוא מצב בו שתי תיאוריות מדעיות הן בעלות בסיס תיאורטי שונה בתכלית, עד כדי חוסר יכולת להשוואה בין השתיים. חוקרים רבים, בעקבות תומאס קון, משייכים אינקומנסורביליות לחוסר-תקשורתיות, ומסבירים שכאשר שתי תיאוריות מתחרות על מתן הסבר לאותן התופעות, חוסר התקשורתיות כופה על החברה בה הן מוצגות לבחור בין השתיים מתוך מניעים לא רציונליים, וכך מתפתח המדע. ביאג'ולי מפתח את המושג מעבר לחוסר תקשורתיות, ומצביע על מאפיינים רבים נוספים שתורמים לחוסר היכולת להשוואה בין תיאוריות, ועל תרומתם להתפתחות תיאוריות מדעיות המתחרות זו בזו. ביאג'ולי לבסוף טוען טענה מעט רדיקלית, ואומר כי האינקומנסורביליות הייתה כלי בו בחרו להשתמש מדעני המהפכה המדעית כדי ליצור לעצמם מעמד סוציו-פרופסיונלי חדש. הבחירה באינקומנסורביליות אפשרה למדענים ליצור סביבה בה לא נאלצו להיות כפופים להיררכיה השכלה מעמדית המצמצמת ומקטינה מחשיבותו של תחום המחקר שלהם. הסביבה הזו, בה פורק המבנה המעמדי של ההשכלה, היא זו שאפשרה את ההתפתחות הרעיונית פורצת הדרך של המהפכה המדעית.

ביאג'ולי מתחיל בתיאור התהליך של התפתחות של תיאוריות אינקומנסורביליות. כדי לתאר את התהליך, הוא משתמש במטפורה דרוויניסטית: כמו באבולוציה, גם תיאוריה צריכה להתאים לסביבה האינטלקטואלית שבה היא צומחת - בית הגידול שלה. תיאוריה יכולה להיעלם לא רק כי היא הוכחה כלא נכונה, אלא גם אם היא לא מתאימה לסביבה שבה היא מתפתחת. שתי תיאוריות ש"מתחרות על אותו בית הגידול", הן שתי תיאוריות שיכולות להסביר את אותן תופעות, והן מתחרות על קבלה של הקהילה המדעית. אם נכיל את המטפורה הדרוויניסטית נוכל לתאר מספר מקרים. התיאוריות עלולות להתמזג זו בזו, אך במקרה זה הן חייבות להיות בעלות הנחות בסיס דומות. אם הן שונות מדי - אינקומנסורביליות, אופציה זו אינה אפשרית ונפתחות אופציות אחרות: אפשרות אחת היא שאחת תיעלם והשנייה תתקבל. אפשרות נוספת, אשר משמשת את ביאג'ולי לתאר את הדיאלוג של גלילאו והאריסטוטלים, היא אפשרות של שימור בבתי גידול סטריליים: אם שתי קהילות מדעיות שונות מקבלות על עצמן שתי תיאוריות שהן

---

[78] Mario Biagioli, "The Anthropology of Incommensurability." In **Galileo Courtier: The Practice of Sciense in the Culture of Absolutism.** ed. Mario Biagioli. Chicago: The University of Chicago Press, 1993, pages 211-242.

שונות מהותית, התיאוריות יוכלו להשתמר, כל אחת בקהילה המדעית שלה, במידה ולא יהיה דיאלוג בין שתי הקהילות, ובתי הגידול יישארו נפרדים ולא מושפעים זה מזה. אם במקרה כזה בכל זאת מתקיים דיאלוג בין הקהילות המדעיות, הוא לרוב יכיל מאפיינים של חוסר תקשורתיות, ונוכל לקרוא לו דיאלוג-לא-תקשורתי (Nondialogue). באופן הזה, ביאג'ולי מתאר את ההתפתחות של המאבק התיאורטי בין גלילאו והאריסטוטלים לגבי ציפה (Buoyancy).[79]

בשלב זה ביאג'ולי נוטש את המטפורה הדרוויניסטית, משום שהיא אינה מתאימה להמשך הפיתוח של התיאוריה. ביאג'ולי קושר את האינקומנסורביליות עם הניסיון לחפש מעמד סוציו-פרופסיונלי חדש. כפי שתיארתי בפרק הראשון, מערכת הידע הישועי הייתה מסודרת בצורה היררכית, ובה המתמטיקה והפיזיקה היו כפופות אל הפילוסופיה והתיאולוגיה. כפי שביאג'ולי טוען, הירכיה שכזו היא גורם שמזמין חוסר תקשורתיות, שכן תיאוריות רבות יכולות להיפסל רק על סמך המהות המעמדית של המדע. פילוסוף יכול לשלול תיאוריה מתמטית בלי לבחון אותה או להיאלץ להתמודד עם הנימוקים המוצגים בעדה או נגדה, רק משום שהוא פילוסוף, והוא ניצב מעל המתמטיקה בהיררכית הידע. אם יקבל את טענת המתמטיקאים שהמתמטיקה נפרדת מן הפילוסופיה הוא יימצא במצב ההפוך בדיוק, שבו לו אין מה לטעון כנגד התיאוריה המתמטית, משום שהיא מתבססת על שלילת תוארו. כך או כך, אנחנו נמצאים במצב של חוסר יכולת לתקשר. המהפכה המדעית ואתה פולמוסים מדעיים שונים ניסו לנתק את המתמטיקה, או את המדע, מהיררכית הידע, כדי שלא יהיו כפופים לפילוסופיה ולתיאולוגיה. ביאג'ולי מעלה את הטענה כי אינקומנסורביליות נוצרת לא רק כאשר תיאוריה מאלצת את המדען (העוסק בה) לקבל תפיסת עולם שונה, אלא גם מאלצת את הקהילה המדעית כולה לקבל היררכית ידע, והיררכיה סוציו-פרופסיונלית חדשה.[80]

כאן ביאג'ולי קושר את האינקומנסורביליות גם לחוסר תקשורתיות, ולמטפורה נוספת, שהיא מטפורה לשונית. התיאוריות המדעיות נחשבות לשפות דרכן ניתן לקרוא את היקום. התיאוריות השונות, במקרה זה הפיזיקה הגליליאנית והפיזיקה האריסטוטלית, הן שתי שפות שונות. בעוד גלילאו הוא דו-לשוני, כלומר מכיר את העולם האריסטוטלי ויכול להתמודד עם טיעונים אריסטוטליים במסגרת ההתנגדות שלו לפיזיקה האריסטוטלית, האריסטוטלים אינם דוברים בשפתו של גלילאו. כאן נכנס הקישור בין חוסר התקשורתיות, המעמד הסוציו-פרופסיונלי ואינקומנסורביליות. המעמד הסוציו-פרופסיונלי של האריסטוטלים מאפשר להם לא ללמוד את שפתו של גלילאו כדי להתנגד אליו - משום שהוא מאפשר להם לזנוח את נימוקיו בתואנות פילוסופיות. הפילוסופים האריסטוטליים אינם יכולים להיות דו-לשוניים, משום שעצם למידתם את השפה הגליליאנית תהייה וויתור על מעמדם. לכן הם גם לא יכולים לנהל דיאלוג מדעי אמתי עם גלילאו וטענותיו.[81]

לסיכום, ביאג'ולי מתאר תהליך היסטורי הקושר מהפכות מדעיות באינקומנסורביליות. חוסר תקשורתיות בין קבוצות מדעיות בזמן המהפכה המדעית הוביל ליצירה של מעמד סוציו-

[79] Biagioli, "The Anthropology of Incommensurability." pp. 212-215.
[80] Biagioli, "The Anthropology of Incommensurability." pp. 215-226.
[81] Biagioli, "The Anthropology of Incommensurability." pp. 232-240.

פרופסיונלי חדש לחברי הקבוצה החדשנית. המעמד החדש אפשר לחברי הקבוצה, ובמקרים מסוימים אף חייב אותם, להתנתק מן הקבוצה השמרנית ולאמץ ולפתח את ראיית העולם החדשה שלהם, מה שיצר תנועות מדעיות חדשות, ובסופו של דבר, את המדע החדש.[82] ביאג'ולי לא מציג את הגורמים לאינקומנסורביליות, אלא, מציג מאפיינים שונים וביטויים שונים של אינקומנסורביליות, ואת תרומתם להתפתחות של מעמד סוציו-פרופסיונלי חדש והתפתחות מדעית.

5. 3. אינקומנסורביליות בין המסדר הישועי ובין המדע החדש

המאפיינים לאינקומנסורביליות שביאג'ולי הגדיר ישמשו אותי כדי לנסות להבין את הדיאלוג בין קווליארי וגולדין, ואת ההשפעה שלו על התפתחות המתמטיקה האינפיניטסימלית.

אתחיל בהצגה של אינקומנסורביליות בתוך המסדר הישועי - בין התיאולוגיה הישועית ובין התיאולוגיה של המתמטיקאים הישועים. כזכור, המתמטיקאים הישועיים שייכו למתמטיקה תכונות תיאולוגיות, על ידי שיוך תכונות מתמטיות למבנה העולם, שהוא גם מבנה האלוהות. כך הם יצרו תיאולוגיה חדשה, שיש לה אפילו מאפיינים פיזיקליים. משום שהמתמטיקה קיבלה תכונות אלוהיות, גם מעמדה של המתמטיקה ומעמדם של המתמטיקאים משתנה, וכך, לפחות בעיני המתמטיקאים הישועיים, הם ניצבים במעמד סוציו-פרופסיונלי חדש - אמנם כביכול מתחת לפילוסופים, אבל בעלי סמכות תיאולוגית ופיזיקלית חדשה, אשר מציבה אותם מעל המדעים השונים. בעיניי הפילוסופים והתיאולוגים, המתמטיקה עדיין ניצבת בתחתית הירכיית ההשכלה. למרות שבמקרה זה הפולמוס הגלוי נגמר עם הכפפת המתמטיקה לתיאולוגיה, חוסר המשך הדיון, ההתחמקות מהתייחסות ישירה לשתי התיאולוגיות השונות והחופש הייחודי שניתן למתמטיקאים עם ההגדרות הרשמיות המצומצמות של מערכת החינוך הישועית (למשל ברציו סטדיורום) יכול להצביע על חשש מפולמוס גלוי, שהתבטא בהשקטת הדיון כולו. החוסר בדיאלוג יכול להיות גם מאפיין דרוויניסטי של התיאולוגיה המתמטית, שכן היא התפתחה רק בקרב המתמטיקאים חברי המסדר הישועי, ויכלה להתבסס רק בהסתמך על החופש שניתן לה כתוצאה מאי-קיום הדיאלוג. אם כך, בעזרת האינקומנסורביליות נוכל להצביע על שתי תיאולוגיות ישועיות- האחת מתמטית והשנייה קתולית קלאסית.

בהמשך לכך, נוכל לצפות ולחפש שני מוטיבים מרכזיים בהתנגדות של הישועים לקווליארי, שנובעים משתי תיאוריות פילוסופיות-תיאולוגיות שונות בחברה הישועית, ששתיהן אינקומנסורביליות לתיאוריה של קווליארי. המוטיב הראשון יתבטא בהתנגדות פילוסופית בעיקרה, הנובעת מעולם המושגים וההנחות האריסטוטלי. השני יפנה אל המבנה של המתמטיקה של קווליארי, מתוך ניסיון להוכיח אותו כלא נכון, וזאת כדי להשיב את המתמטיקה הישועית על כנה ואת הסדר המתמטי-האלוהי הקתולי למקומו.

אציג כעת את האינקומנסורביליות העיקרית שקיימת בפולמוס ההיסטורי בין הישועים והאינפיניטסימליים, והיא כמובן זו המוצגת בדיאלוג בין קווליארי וגולדין. מאוחר יותר

[82] Biagioli, "The Anthropology of Incommensurability." p. 242.

אעשה הפרדה בין כמה מאפיינים שונים במתמטיקה של גולדין ובהתנגדות שלו לאינפיניטסימלים, אבל אתחיל את הסקירה בהנחה שגולדין הוא מתמטיקאי ישועי שמקבל את התיאולוגיה המתמטית הישועית ואת ההנחות הקלאסיות של המתמטיקה הישועית.

ראשית, כפי שעולה באופן מידי, התיאוריות של גולדין וקווליארי שונות באופן מהותי. מבנה היקום המתמטי שונה בהן לחלוטין: באחת, היקום המתמטי הוא קונסטרוקטיבי, בעוד בשנייה הוא אטומיסטי ומושתת על דקונסטרוקציה של אובייקטים מתמטיים. שנית, התיאוריות התפתחו בצורה סטרילית, וצמחו בשני "בתי גידול" שונים לחלוטין. כדי להעלות על הדעת את המתמטיקה האינפיניטסימלית על קווליארי יש לזנוח את הנחות היסוד של היקום המתמטי האריסטוטלי ולהפך, היקום המתמטי האריסטוטלי יכול להתקיים רק אם אינפיניטסימליים אינם מתקיימים, משום שהוא שולל את קיומם.

מאפיין נוסף של אינקומנסורביליות שמופיע פעמים רבות לאורך הדיון בין השניים הוא חוסר תקשורתיות, ועליו ארחיב במיוחד. מאפיין ראשוני של חוסר תקשורתיות בדיאלוג, הוא השלילה הפילוסופית של גולדין את האינדיביזיבילים של קווליארי. עוד לפני שגולדין מנסח נימוקים מתמטיים כנגד התיאוריה של גולדין, הוא שולל אותה על סמך ההנחה, הפילוסופית בבסיסה, לגבי המבנה של הרצף המתמטי. אך בבניית התיאוריה שלו, קווליארי נמנע מלהתחייב לתפיסת עולם אטומיסטית כבסיס למתמטיקה שהוא מציג, ואף טוען באופן מפורש שהבחירה באטומיזם תלויה אך ורק בקורא. הטיעון הוא אינקומנסורבילי מצדו של גולדין: הוא טיעון פילוסופי המתנגד לטענה מתמטית. קווליארי מציג אל מולו טיעון המאפשר לו להתעלם מהטיעון של גולדין, ולכן הוא חוסר תקשורתי. טיעון נוסף המציג אלמנטים של חוסר תקשורתיות ואינקומנסורביליות הוא הטיעון של קווליארי ביחס לאינסוף. כאשר גולדין טוען שהתיאוריה של קווליארי אינה תקפה משום שהיא מכלילה יחסים על גדלים אינסופיים, קווליארי מציג מושג אינסוף חדש המאפשר לו להתחמק מההתנגדות של גולדין. בעוד גולדין מנסה להכפיף את התיאוריה שלו לעולם מושגים אריסטוטלי בו היא לא תקפה, קווליארי פשוט ממציא עולם מושגים חדש המתקף את התיאוריה שלו. גם כאן כמו עם גלילאו והאריסטוטלים נכנס העניין של המחויבות למעמד הסוציו-פרופסיונלי, שכן אם גולדין ינסה להתנגד באופן מתמטי לסוגי האינסוף שקווליארי מגדיר, הוא יהיה מחויב לדבר בשפתו של קווליארי, ובכך להכיר בשוויון ביניהם, לפחות בכל הנוגע להמצאת מושגים מתמטיים. לכן הדיאלוג נשאר דיאלוג-לא-תקשורתי ונותר בעינו.

6. סיכום העבודה ומסקנות

בחינה של המסדר הישועי ועיקרון קווליארי מאפשרת למקם את הדיאלוג בין השניים על התפר הרעיוני הייחודי שבין ימי הביניים והעת החדשה. על ידי ניתוח של הרעיונות הבאים לידי ביטוי בכל אחת מן התפיסות ניתן לראות את הפער העצום שביניהן.

כדי להבין את הדיון המתמטי בין גולדין לקווליארי לעומקו יש לשים לב למאפיין חשוב בזהות המתמטית של גולדין. מתוך הדיון באינקומנסורביליות ובחוסר התקשורתיות, וכן מתוך הבנה המתמטית של גולדין עולה כי לגולדין יש זהות דואלית- הוא קרוע בין העולם המתמטי

הקלאסי הישועי לבין המתמטיקה של העת החדשה. מצד אחד, גולדין הוא מתמטיקאי ישועי. הוא מבסס את זהותו ככזה על ידי ההתנגדות למתמטיקאים חדשנים ועל ידי הוכחה מחודשת על ידי נימוקים קלאסיים של הוכחות ארכימדיות שהוכחו בעבר בכלים אינפיניטסימליים. מן הצד השני, המתמטיקה שהוא מציג כחוקר עצמאי היא אינה מתמטיקה קלאסית, ואף על פי שהוא מנסה להפוך אותה לכזאת, ניתן לראות גם במסקנות וגם באופי של הנימוקים המתמטיים שלו שהוא מכליל בתוכה הנחות חדשניות, כמו הטענה בדבר תזוזתו של מרכז הכובד של כדור הארץ. ניתן אפילו לראות מאפיינים של אינקומנסורביליות בתוך המתמטיקה שלו עצמה, שכן הוא מצד אחד טוען שביכולתו כמתמטיקאי לטעון שכדור הארץ יכול לנוע סביב צירו, ולבסוף סותר זאת על רקע פילוסופי. זהות דואלית שכזו, שאף מתבטאת במתמטיקה עצמה מוכיחה לדעתי את עומקו וחשיבותו של הקרע הרעיוני. זהות זו היא לדעתי גם זו שקוראת להוציא את אותן סיבות פילוסופיות "שאין לציין" מתוך מערכת השיקולים המתמטית, ולהפריד בין המתמטיקה והתיאולוגיה, הפרדה שהיא לדעתי אחד מהמוקדים החשובים של המהפכה המדעית.

אם כך, הדיאלוג בין הישועים והמתמטיקה האינפיניטסימלית הוא דיאלוג המונע מהנחות תיאולוגיות ולא מהנחות מתמטיות. גם הפן המתמטי של הדיאלוג, אף על פי שמתנהל במישור מתמטי בלבד, הונע על ידי סיבות תיאולוגיות, משום שהמתמטיקה הישועית, בניגוד למתמטיקה של המהפכה המדעית, היא מתמטיקה המונעת מתיאולוגיה. למרות זאת, המהות התיאולוגית הייחודית של המתמטיקה הישועית לא הצליחה לנתק את המתמטיקאים הישועיים מהשפעותיה של המהפכה המדעית. מתמטיקאים ומדענים ישועיים הושפעו עמוקות מהמהפכה המדעית, וניתן לראות בעבודתו של גולדין עדויות לכך.

מבחינה היסטורית, הישועים הצליחו במאבקם. לאחר מותו של אנג'לי, אחרון תלמידיו של קווליארי שהמשיך להיאבק במתמטיקה הישועית, נעלם העיסוק באינפיניטסימלים מאיטליה, שהייתה מוקד הכוח הישועי. העיסוק באינפיניטסימליים הופץ בינתיים למדינות אחרות והמשיך בידי מתמטיקאים ופיזיקאים שונים במדינות אירופה: ניוטון באנגליה, לייבניץ בגרמניה ולגראנז' בצרפת הם אחדים מהם. איטליה, שהייתה רק שנים מועטות לפני כן מוקד פריחתו של הרנסנס המתמטי של ראשית העת החדשה, נותרה שוממה.

אמנם, אם נסתכל על גולדין כמקרה בוחן, נוכל לראות שהמאבק הישועי שכלל ניסיון לרסן את החידוש ולהתמיד בערך האמונה והציות העיוורים של המסדר, כשל. למרות מאבקו של המסדר הישועי במתמטיקה ובמדע החדש וניסיונו לשמר את מעמדו הפוליטי, תוך זמן קצר כוחו החינוכי דעך. המדע החדש שלט וממשיך לשלוט בכיפה הרעיונית והפוליטית האירופאית ביד רמה בעוד שהמתמטיקה התיאולוגית היא עתה עניינם של היסטוריונים בלבד.

7. ביבליוגרפיה

Farrell, Allan P. **The Jesuit Ratio Studiorum of 1599.** Washington D.C: Conference of Major Superiors of Jesuits, 1970.

פלדחי, רבקה. "המעבר למודרניות: השדה התרבותי של המדע הישועי." **זמנים: רבעון להיסטוריה**, גיליון 49, 1994, עמודים 25-34.

פלדחי, רבקה, ומרצל קיי. "טקסטים מתמטיים בהקשר תרבותי: מדע ישועי בראשית העת החדשה." **זמנים: רבעון להיסטוריה**, גיליון 66, 1999, עמודים 64-76.

שוורץ, יוסף. **מהמנזר אל האוניברסיטה, בין תיאולוגיה לפילוסופיה בימי הביניים**. תל אביב, משרד הביטחון, 1999.

Alexander, Amir R. **Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World**. New York: Scientific American/ Farrar, Straus and Giroux, 2014.

Andersen, Kirsti. "Cavalieri's method of indivisibles", **Archive for History of Exact Sciences**, volume 31, 1984, pages 291-367.

Biagioli, Mario. "The Anthropology of Incommensurability." In **Galileo Courtier: The Practice of Sciense in the Culture of Absolutism.** ed. Mario Biagioli, Chicago: The University of Chicago Press, 1993, pages 211-242.

Feingold, Mordechai. "Jesuits: Savants." In **Jesuit Science and the Republic of Letters, Transformations: Studies in the History of Science and Technology.** ed. Mordechai Feingold, Sabon: MIT Press, 2003, pages 1-45.

Feldhay, Rivka. **Galileo and the Church: Political Inquisition or Critical Dialogue**. New York: Cambridge University Press, 1995.

Feldhay, Rivka. "The Cultural Field of Jesuit Science." In **The Jesuits: Cultures, Sciences and the Arts 1540-1773.** ed. Jhon O'Malley. Toronto: University of Toronto Press, 1999, pages 107-130.

Gatto, Romano. "Christoph Clavius' 'Ordo Servandus in Addiscendis Disciplinis Matematicis' and the Teaching of Mathematics in Jesuit Colleges at the Beginning of the Modern Era." **Science & Education**, volume 15, 2006, pages 235-258.

Lattis, James M. **Between Copernicus and Galileo, Christoph Clavius and the Collaps of Ptolomaic Cosmology**. Chicago: The University of Chicago Press, 1994.

Mahoney, Michael S. "Mathematics" In **Science in the Middle Ages.** ed. David C. Lindberg, Chicago: University of Chicago Press, 1978, pages. 145-178.

Mancosu, Paolo. **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**: New York: Oxford University Press, 1996.

O'Connor, John J. and Robertson, Edmund F. **Cavalieri biography**. July 2014. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri.html (accessed 2016).

O'Connor, John J. and Robertson Edmund F. **Guldin biography**. May 2010. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Guldin.html (accessed 2016).

O'Connor, John J. and Robertson Edmund F. **Tartaglia biography**. September 2005. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html (accessed 2017).

Smolarski, Dennis C. "The Jesuit Ratio Studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities." **Science in Context,** volume 15, 2002, pages 447-457.

Von Plato, Jan. **Proof Theory Development.** 2014. https://plato.stanford.edu/entries/proof-theory-development/#PreNotPro (accessed 2017)